Xalq ta'limi vazirligi Fan olimpiadalari bo'yicha iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash departamentining matematika fanidan

14 – haftalik topshiriqlarning yechimlari

10 – 11 sinf o'quvchilari uchun

1 – ALGEBRA. Aytaylik

$$\begin{cases} (xy^{-1})^{yx^{-1}} = x^y y^{-x} \\ \sqrt[2020]{\dfrac{xy^{-1}+yx^{-1}}{x^y+y^x}} = 2020^{\frac{xy^{-1}-yx^{-1}}{x^y+y^x}} \end{cases}$$

sistema o'rinli bo'lsin. U holda $(x+y)^{2020}$ ifoda son qiymatining oxirgi raqamini toping.

Yechimi. Tenglamani ushbu ko'rinishda yozib olamiz:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} = \frac{x^y}{y^x} \Rightarrow x^{\frac{x}{y}-y} = y^{\frac{x}{y}-x} \Rightarrow \frac{x}{y} - y = \frac{x}{y} - x = 0$$

tenglik kelib chiqadi. Bu yerda $x, y \neq 0$. Demak

$$\begin{cases} y = xy \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow y = 1,\ x = 1$$

Bundan

$$(x+y)^{2020} = 2^{2020}$$

2 ning darajalaridan har 4 tasining oxirgi raqami takrorlanib kelishini inobatga olsak

$$2^{2020} = (2^4)^{505} = \ldots.6\,.$$

2 –. SONLAR NAZARIYASI. $9997\times n$ sonining barcha raqamlari toq bo‘ladigan eng kichik bo‘lib, $n>1$ eng kichik bo‘lsin. U holda $(n-3333)^{2020}$ sonini 7 ga bo‘lgandagi qoldiqni toping.

Yechimi. $9997n$ sonini quyidagicha yozib olamiz:

$$9997n=(10000-3)n=10000(n-1)+(10000-3n)$$

Masala shartidan malumki $9997n$ barcha raqamlari toq bo‘lishi kerak.

Bundan ko‘rinadiki n ham toq bo‘lishi kerak, shuning uchun n ning oxirgi raqami ham toq, demak $9997n$ sonining oxirgi raqami ham toq. Bundan kelib chiqadiki $n-1$ juft son. Agar $n<3335$ deb olsak bundan

$$0<10000-n<10000$$

va $9997n$ sonining 10000 – xonasidagi raqam $10000(n-1)$ sonining 10000 – xonasidagi raqam bilan bir xil va bu juft son. Shuning uchun $9997n$ juft sondan tashkil topib qoladi va bu masala shartiga zid. Agar n sonini 3335 deb olsak $9997\cdot 3335=33339995$ ga teng. Demak, n ning eng kichik qiymati $3335\,3335$ ekan.

3 – GEOMETRIYA. $\triangle ABC$ uchburchakda BC, CA, AB tomonlarning o‘rtalari mos ravishda D, E, F nuqtalar va AD, BE, CF medianalarning o‘rtalari mos ravishda P, Q, R bo‘lsin. U holda

$$\frac{AQ^2+AR^2+BP^2+BR^2+CP^2+CQ^2}{AB^2+BC^2+AC^2}$$

nisbatni toping.

Yechimi. ΔABC uchburchakni koordinatalar tekisligida A nuqtani koordinatalar boshi qilib, AB tomonni absissalar o‘qi sifatida tanlab joylashtiraylik. Bunda B va C nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(4x;0)$ va $(4y;4z)$ ga teng bo‘lsin. D, E, F, P, Q, R nuqtalarning koordinatalari mos ravishda

$$D(2x+2y;2z);\ E(2y;2z);\ F(2x;0);\ P(x+y;z);\ Q(2x+y;z)\ \text{va}\ R(x+2y;2z)$$

ga teng bo‘ladi. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko‘ra

$$AQ^2=(2x+y)^2+z^2=4x^2+4xy+y^2+z^2$$

$$AR^2=(x+2y)^2+4z^2=x^2+4xy+4y^2+4z^2$$

$$BP^2=(3x-y)^2+z^2=9x^2-6xy+y^2+z^2$$

$$BR^2=(3x-2y)^2+4z^2=9x^2-12xy+4y^2+4z^2$$

$$CP^2=(x-3y)^2+9z^2=x^2-6xy+9y^2+9z^2$$

$$CQ^2=(2x-3y)^2+9z^2=4x^2-12xy+9y^2+9z^2$$

Bu tengliklarni qo‘shib,

$$28(x^2-xy+y^2+z^2)$$

ifodani hosil qilamiz. Boshqa tomondan esa

$$AB^2=16x^2$$

$$BC^2=16x^2-32xy+16y^2+16z^2$$

$$AC^2=16y^2+16z^2$$

Bu tengliklarni qo‘shib

$$32(x^2-xy+y^2+z^2)$$

ifodani olamiz. Demak,

$$\frac{AQ^2+AR^2+BR^2+BP^2+CP^2+QC^2}{AB^2+BC^2+CA^2}=\frac{7}{8}$$

Javob: $\frac{7}{8}$

4 – KOMBINATORIKA. Firdavs 2 ta haqiqiy S va P sonlarni o‘ylab topmoqchi, 6 ta turli haqiqiy sonlarni aylanaga shunday joylashtiradiki, bunda ketma – ket kelgan ixtiyoriy aylanadagi 3 ta son quyidagi 2 ta shartdan kamida 1 tasini qanoatlantirishi kerak:

1) Yig‘indisi S ga 2) Ko‘paytmasi P ga teng

Firdavs bunday sonlarni topa oldimi? Javobingizni to‘liq asoslang!

Yechimi. Faraz qilaylik Firdavs bunday sonlarni topa olgan bo‘lsin va ular a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 sonlar bo‘lsin. Agar ketma-ket kelgan uchtasining yig‘indisi S bo‘lsa bu uchlikni qizil, aks holda yashil deb ataylik, ya’ni masala shartiga ko‘ra bu uchlikdagi sonlar ko‘paytmasi P ga teng.

1) Ikkita ketma-ket kelgan uchliklar bir vaqtda qizil bo‘la olmaydi, chunki ikkita ketma-ket kelgan qizil uchliklar topilsa,

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 = S$$

tenglik bajariladi, bundan esa $a_1 = a_4$ tenglik kelib chiqadi, bu esa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 sonlar turli ekanligiga zid.

2) Ketma-ket kelgan 2 ta uchlik yashil bo‘lsin, bundan esa $P = 0$ ga ega bo‘lamiz. Chunki agar

$$a_1a_2a_3 = a_2a_3a_4 = P \neq 0$$

bo‘lsa $a_1 = a_4$, bu esa ziddiyat. Demak $P = 0$ ekan.

3) $P = 0$ holat imkonsiz. Aks holda a_i sonlar orasida bitta 0 mavjud va qolgan 5 tasi 0 dan farqli bo‘ladi. Ular orasidan ketma-ket kelgan 4 tasini olaylik va bu 4 ta son ketma-ket kelgan ikkita uchlik hisoblanadi. Bu uchliklar yashil bo‘la olmaydi (ularning birortasi ham 0 ga teng emas), demak ular qizil bo‘lishi kerak, lekin bu ham 1) ga ko‘ra ziddiyat. Demak $P \neq 0$

4) 1), 2), 3) hollardan ko‘rinadiki ketma-ket kelgan 2 ta uchlik yashil ham qizil ham bo‘la olmas ekan. Birinchi, uchinchi, beshinchi uchliklar rangi va ikkinchi, uchinchi, to‘rtinchi uchliklar rangi bir xil ekan.

Umumiylikka zarar yetkazmagan holda (a_1, a_2, a_3), (a_3, a_4, a_5), (a_5, a_6, a_1) uchliklarni qizil, qolganlarini esa yashil deb ataylik. Demak

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow a_1 + a_2 = a_4 + a_5$$

Bundan tashqari, 3) dan bizga ma'lumki

$$a_6 a_1 a_2 = a_4 a_5 a_6 = P \neq 0 \Rightarrow a_1 a_2 = a_4 a_5$$

Bundan (a_1, a_2) va (a_4, a_5) juftliklar bir xil kvadrat tenglamaning ildizlari ekanligi kelib chiqadi. Bu esa kvadrat tenglama ko'pi bilan ikkita ildizga ega bo'lishidan bu juftliklar teng bo'lishiga olib keladi. Bu esa masala shartiga zid. Demak qilgan farazimiz noto'g'ri ekan, ya'ni Firdavs masala shartini qanoatlantiradigan sonlarni topa olmaydi.

7 – 9 sinf o'quvchilari uchun

Nostandart tenglamalar haftaligi

1 – masala. $(x^2 - 16)(x-3) + 9x^2 = 0$ tenglamani yeching.

Yechimi. Berilgan tenglamaning ikkala tarafini $(x-3)^2$ ga bo'lamiz, chunki $x \neq 3$

$$x^2 - 16 + \left(\frac{3x}{x-3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 16 = 0$$

Qulaylik uchun $\frac{x^2}{x-3} = a$ deb belgilash kiritamiz. U holda

$$a^2 - 6a - 16 = 0 \Rightarrow a_1 = 8, \; a_2 = -2$$

1 – hol. $\frac{x^2}{x-3} = 8 \Rightarrow x^2 - 8x + 24 = 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin R$

2 – hol. $\frac{x^2}{x-3} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -1 \pm \sqrt{7}$

2 – masala. Aytaylik

$$\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-5}+\frac{17}{x-17}+\frac{19}{x-19}=x^2-11x-4$$

tenglamaning eng katta yechimi $m=a+\sqrt{b+\sqrt{c}}$ bo‘lsin, Bu yerda $a, b, c\in\mathbb{Z}$. U holda $a+b+c$ yig‘indini hisoblang.

Yechimi. Tenglikning har ikki tomoniga 4 ni qo‘shamiz:

$$\left(\frac{3}{x-3}+1\right)+\left(\frac{5}{x-5}+1\right)+\left(\frac{17}{x-17}+1\right)+\left(\frac{19}{x-19}+1\right)=x^2-11x-4+4$$

Yoki

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x}{x-5}+\frac{x}{x-17}+\frac{x}{x-19}=x^2-11x$$

$x=0$ ildiz ekanligini topamiz. Endi noldan farqli ildizlarni topaylik:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-17}+\frac{1}{x-19}=x-11$$

Endi $y=\dfrac{x-3+x-5+x-17+x-19}{4}=x-11$ almashtirishni bajaramiz:

$$\frac{1}{y+8}+\frac{1}{y+6}+\frac{1}{y-6}+\frac{1}{y-8}=y\ \Rightarrow\ \frac{2y}{y^2-64}+\frac{2y}{y^2-36}=y$$

$y=0$, ya’ni $x=11$ ildiz ekanligini topamiz. Endi boshqa ildizlarni topaylik:

$$\frac{2}{y^2-64}+\frac{2}{y^2-36}=1\Rightarrow y^4-104y^2+2504=0\Rightarrow$$

$$y_{1,2}^2=52\pm\sqrt{200}\Rightarrow x_{1,2,3,4}=11\pm\sqrt{52\pm\sqrt{200}}$$

Masala shartiga mos ildiz $x=11+\sqrt{52+\sqrt{200}}$ ekanligidan

$$a+\sqrt{b+\sqrt{c}}=11+\sqrt{52+\sqrt{200}}\Rightarrow a=11, b=52, c=200$$

ekanini topamiz. Demak $a+b+c=11+52+200=263$

Javob: 263

3 – masala. Aytaylik

$$\frac{\sqrt[45]{x}}{2}=\frac{\sqrt[45]{x+8}}{x}+\frac{\sqrt[45]{x+8}}{8}$$

tenglama ildizi $\dfrac{2a}{\sqrt[b]{a^c}-1}$ ko‘rinishida bo‘lsin. U holda $\left(\dfrac{b-c+a}{5}\right)^{2020}$ sonini 2020 ga bo‘lgandagi qoldiqni toping.

Yechimi. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$\sqrt[45]{x}\cdot 4x=8\sqrt[45]{x+8}+x\cdot\sqrt[45]{x+8}\Rightarrow\sqrt[45]{x}\cdot 4x=\sqrt[45]{x+8}\cdot(x+8)$$

$$4^{45}=\left(1+\frac{8}{x}\right)^{46}\Rightarrow\frac{8}{x}=2^{\frac{90}{46}}-1\Rightarrow x=\frac{8}{2^{\frac{90}{46}}-1}\Rightarrow a=4,\ b=46,\ c=45.$$

$$\Rightarrow\left(\frac{b-c+a}{5}\right)^{2020}=1$$

Javob: 1

4 – masala. Quyidagi sistemaning barcha haqiqiy yechimlarini toping.

$$\begin{cases}4x=\sqrt{16y^2-1}+\sqrt{16z^2-1}\\4y=\sqrt{16z^2-1}+\sqrt{16x^2-1}\\4z=\sqrt{16x^2-1}+\sqrt{16y^2-1}\end{cases}$$

Yechimi. $\sqrt{16x^2-1}=a$, $\sqrt{16y^2-1}=b$, $\sqrt{16z^2-1}=c$ deb belgilaylik.

$$\begin{cases}4x=\sqrt{16y^2-1}+\sqrt{16z^2-1}\\4y=\sqrt{16z^2-1}+\sqrt{16x^2-1}\\4z=\sqrt{16y^2-1}+\sqrt{16x^2-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=b+c\\4y=c+a\\4z=b+a\end{cases}$$

Sistema tenglamalarini kvadratga oshiramiz:

$$\begin{cases} 16x^2 = b^2 + 2bc + c^2 \\ 16y^2 = c^2 + 2ca + a^2 \\ 16z^2 = b^2 + 2ba + a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 = b^2 + 2bc + c^2 \\ b^2 + 1 = c^2 + 2ca + a^2 \\ c^2 + 1 = b^2 + 2ba + a^2 \end{cases}$$

Bu tengliklarni qo'shsak,

$$a^2 + 1 + b^2 + 1 + c^2 + 1 = b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + 2ba + a^2 + a^2 + 2ac + c^2$$

$$3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow (a+b+c)^2 = 3$$

$$a + b + c = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - (b+c) \Rightarrow \sqrt{16x^2 - 1} = \sqrt{3} - 4x$$

Kvadratga oshirsak:

$$16x^2 - 1 = 3 - 8\sqrt{3}x + 16x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Xuddi shu tarzda $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ va $z = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ekanligi aniqlanadi.

Javob: $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

Fan olimpiadalari bo'yicha iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash departamenti sizga omad tilaydi!