Xalq ta’limi vazirligi Fan olimpiadalari bo‘yicha iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash departamentining matematika fanidan 11 – haftalik topshiriqlarining yechimlari

10 – 11 sinf o‘quvchilari uchun

1 – SONLAR NAZARIYASI. Aytaylik $m,n\in\mathbb{Z}$ butun sonlar uchun $x^3+y^3=2020xy$ bo‘lsin. U holda $x+y$ yig‘indining qiymatini toping.

Yechimi: Tenglamani 27 ga ko‘paytirib quyidagicha yozib olamiz:

$$(3x)^3+(3y)^3+2020^3-3\cdot(3x)(3y)\cdot 2020=2020^3$$

$$(3x+3y+2020)(9x^2+9y^2+2020^2-9xy-6060x-6060y)=2020.$$

Ba’zi chekli hollarni qarab ko‘rib yechimlarni topish mumkin.

2 – ALGEBRA. Aytaylik $x^{2020}+a_{2019}x^{2019}+a_{2018}x^{2018}+\ldots+a_0$ butun koeffitsiyentli ko‘phadning $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$ ildizlari musbat sonlar bo‘lsin. U holda a_{1010} koeffitsiyentning eng kichik qiymatini toping.

Yechimi. Masalani umumiy holda yechamiz:

$$x^{4n}+a_{4n-1}x^{4n-1}+a_{4n-2}x^{4n-2}+\ldots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$$

ko‘phadning ildizlari musbat sonlar bo‘lsin. U holda a_{2n} koeffitsiyentning eng kichik qiymatini toping.

Aytaylik $x_1, x_2, \ldots, x_{4n}$ musbat sonlar uning ildizi bo‘lsin. Bundan

$$a_0=x_1x_2\ldots x_{2020}>0 \Rightarrow a_0\geq 1$$

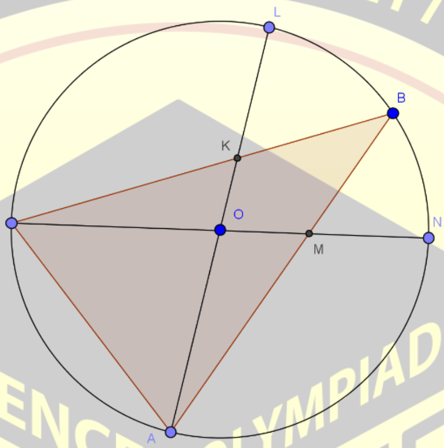
Demak o‘rta qiymatlar haqidagi tengsizlikka ko‘ra

$$a_{2n}=\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_{2n}\leq 4n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{2n}}\geq C_{4n}^{2n}\left(\prod_{1\leq i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_{2n}\leq 4n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{2n}}\right)^{\frac{1}{C_{4n}^{2n}}}=$$

$$C_{4n}^{2n}\left(x_1x_2\dots x_{4n}\right)^{\frac{C_{4n-1}^{2n-1}}{C_{4n}^{2n}}}=C_{4n}^{2n}\sqrt{x_1x_2\dots x_{4n}}=C_{4n}^{2n}\sqrt{a_0}\ge C_{4n}^{2n}.$$

Tenglik holi $x_1=x_2=\dots=x_{2020}=1$ da bajariladi.

3 – GEOMETRIYA. Aytaylik o‘tkir burchakli $\triangle ABC$ uchburchakda $3BC=2\sqrt{2}AB$ va O tashqi chizilgan aylana markazi bo‘lsin. Agar $AK=3KL$ va $CM=2MN$ bo’lsa, AL va CN orasidagi burchakni toping.



Yechimi: Qulaylik uchun quyidagi belgilashlarni olaylik:

$$AB=c, BC=a,\ AC=b,\ BN=2\alpha,\ BL=2\theta-2\alpha,\ KL=x,\ AK=3x.$$

Bundan

$$OK=3x-R,\ OK+KL=R\ \Rightarrow\ 2x=R\ \Rightarrow OK=\frac{R}{2}.$$

Xuddi shunday $MN=y$ deb olsak,

$$3y=2R\ \Rightarrow OM=\frac{R}{3}$$

natijani topamiz. Endi $\triangle ABC$ uchburchakda sinuslar teoremasini qo‘llaymiz:

$$\frac{c}{\sin(90^\circ+\alpha-\theta)}=\frac{a}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{b}{\sin\theta}=2R$$

$$\frac{c}{\cos(\alpha-\theta)}=\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\theta}=2R\Rightarrow\begin{cases}b=2R\sin\theta\\ a=2R\cos\alpha\\ c=2R\cos(\alpha-\theta)\end{cases}$$

Endi $\triangle OKC$ va $\triangle AOM$ uchburchaklarga sinuslar teoremasini qo‘llaymiz:

$$\frac{\frac{R}{2}}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(2\theta-\alpha)}\Rightarrow 2\sin\alpha=\sin(2\theta-\alpha)\ \ (1)$$

$$\frac{R}{\sin(\theta+\alpha)}=\frac{\frac{R}{3}}{\sin(\theta-\alpha)}\Rightarrow \sin\theta\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\theta\ \ (2)$$

So‘nggi topilgan ikkita tenglikdan $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ tenglikni topamiz. Masalada berilgan chizmaga ko‘ra $\theta=45^{\circ}$. Demak $AL\perp CN$.

4 – KOMBINATORIKA. Kamida 3 ta raqami bir xil bo‘lgan 10 xonali sonlar nechta? Javobingizni asoslang!

Yechimi: Bizdan so‘ralayotgan narsaga e’tibor beraylik. Kamida 3 ta bir xil raqamga ega sonlarni topishimiz kerak. Ya’ni 3 ta, 4 ta, 5 ta, …, 9 ta yoki 10 ta bir xil raqami bo‘lishi kerak, hech qaysi raqami 2 martadan ko‘p qatnashmaydigan sonlar esa bizga kerakmas.

Masalani yechishni qanday boshlash yaxshiroq?

Albatta biz 3 ta, 4 ta, 5 ta, … 9 ta va 10 ta bir xil raqami bor sonlarni topib chiqib ham masalani yechishimiz mumkin. Lekin agar biz barcha 10 xonali sonlar sonidan hech qaysi raqami 2 martadan ko‘p qatnashmaydigan sonlar sonini ayirib tashlasak eng yaqin yo‘ldan harakatlangan bo‘lamiz, chunki faqat 2 ta hol ko‘rish yetarli bo‘ladi:

I) Barcha raqami turli;

II) Qaysidir raqamlar ikki marta, qolganlaridir bir marta qatnashgan.

Masala yechishda qulay bo‘lishi uchun 10^n liklar xonasini $n+1$ – xona deb olamiz. Masalan 10 liklar xonasi 2 – xona, 100 liklar xonasi 3 – xona. 10 xonali sonni raqamlarini jadval ko‘rinishida faraz qilsak:

10-xona	9-xona	8-xona	7-xona	6-xona	5-xona	4-xona	3-xona	2-xona	1-xona

I) 10 – xonada 0 bo‘la olmaydi, 9 ta raqam 10 – xona uchun nomzod, 9 – xonada 10 – xonadagi son qatnashmaydi ya’ni 9 ta raqam 9 – xona uchun nomzod, 8 – xona uchun 8 ta raqam nomzodlik qiladi, 7 – xona uchun 7 ta, …, 1 – xona uchun esa 1 ta. Demak raqamlari takrorlanmaydigan 10 xonali sonlar: $9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=9\cdot9!=3265920$.

II) Endi biz qaysidir raqamlar ikki marta, qaysilaridir bir marta qatnashgan sonlarni topishimiz kerak. 2 marta qatnashgan sonlar ko‘p bo’lishi ham mumkin. Aytaylik sonda birdaniga 2 ta 1, 2 ta 7, 2 ta 5 qatnashib qolgan sonlar shu sonlardan va bir – biridan farqli bo‘lishi ham mumkin. Shuning uchun bu holning o‘zini ham hollarga bo‘lishimiz kerak. Agar bitta son tarkibida 2 ta bir xil raqam bo‘lsa shu raqamlarga juftlik deb nom qo‘yib olamiz.

a) Aynan 1 ta juftlik bo‘lsin: Demak 10 ta raqamdan qaysidir ikkitasi bir xil. Eng avval shu juftlikni necha xil tanlash mumkinligini topib olamiz. 10 tadan 2 tani tanlab olish kerak. $C_{10}^2=45$ xil usulda tanlash mumkin. Endi barcha raqamlarni shu 10 ta xonaga joylashtirib olish zarur. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda 9 – va 5 – xonalarni bir xil deb olamiz. 10 – xonada 0 bo‘la olmaydi, 9 ta raqam 10 – xona uchun nomzod, 9 – xonada 10 – xonadagi son qatnashmaydi ya’ni 9 ta raqam 9 – xona uchun nomzod, 8 – xona uchun 8 ta raqam nomzodlik qiladi, 7 – xona uchun 7 ta, 6 – xona uchun 6 ta, 5 – xonada esa 9 – xonadagi son ya’ni o‘zining jufti bo‘ladi (1 ta nomzod), 4 – xona uchun 5 ta nomzod, …, 1 – xona uchun esa 2 ta:

9	**9**	**8**	**7**	**6**	**1**	**5**	**4**	**3**	**2**

$9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$ bo‘lishi kerak, ammo bu 45 dan bir qismi edi. Demak aynan 1 ta juftlik bo‘lganlari $45\cdot9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=146966400$

b) Aynan ikkita juftlik bo‘lsin. Bitta juftlikdagi son boshqa bir juftlikdagi sonni takrorlamasligi zarur, aks holda qaysidir raqam 4 marta ishtirok etgan bo‘lib qoladi. Demak biz 10 ta raqam ichidan aynan ikkita juftlikni tanlab olishimiz kerak. Avval 10 tadan 2 tani tanlaymiz, so‘ng qolgan 8 tadan ham 2 tani tanlaymiz, **Lekin:**

										va										

holatlar bir xil deb qaraladi. Shuning uchun takrorlanish hisobiga natijani 2! ga ham bo‘lish kerak. $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2}{2!} = 630$ Umumiylikka zarar yetkazmagan holda juftliklarni jadvaldagidek tanlash mumkin va 630 ga ko‘paytirib qo‘yamiz (chunki 630 taning har biri bir xil sondagi kombinatsiyaga ega bo‘ladi)

9	**9**	**8**	**7**	**6**	**1**	**5**	**4**	**1**	**3**

$630 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1028764800$.

c) Aynan 3 ta juftlik qatnashganlarni topamiz. Bu ham tepadagidek topiladi. Avval juftliklar soni: $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2}{3!} = 3150$. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda 3150 tadan bitta holini joylashtirib ko’ramiz:

9	**9**	**8**	**7**	**6**	**1**	**5**	**1**	**1**	**4**

$3150 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1714608000$.

d) Aynan 4 ta juftlik qatnashganlarni topamiz. Bu ham tepadagidek topiladi. Avval juftliklar soni: $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2}{4!} = 4725$. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda 4725 tadan bitta holini joylashtirib ko‘ramiz:

9	**9**	**8**	**1**	**7**	**1**	**6**	**1**	**1**	**5**

$4725 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 642978000$.

e) Aynan 4 ta juftlik qatnashganlarni topamiz. Bu ham tepadagidek topiladi. Avval juftliklar soni: $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{5!} = 945$. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda 945 tadan bitta holini joylashtirib ko‘ramiz:

9	9	8	1	7	1	6	1	1	1

$945 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 25719120$.

Barcha 10 xonali sonlar (9000000000 ta) orasidan chiqarib tashlanilishi kerak bo‘lgan sonlar topildi. Demak izlangan natija:

$$9000000000 - (3265920 + 146966400 + 1028764800 + 1714608000 +$$
$$642978000 + 2571920) = 5437697760$$

Javob: 5437697760 ta

7 – 9 sinf o‘quvchilari uchun

ALEBRA HAFTALIGI

1 – masala. Aytaylik $f(x) = \frac{x^3}{-3x^2 + 3x - 1}$ bo‘lsin. U holda yig‘indini hisoblang.

$$f\left(\frac{2019}{2020}\right) + f\left(\frac{1}{2020}\right)$$

Yechimi. Dastlab $f(1-x)$ ni hisoblab ko‘raylik:

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^3}{-3(1-x)^2 + 3(1-x) - 1} = \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{-3x^2 + 6x - 3 + 3 - 3x - 1} =$$

$$\frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{-3x^2 + 3x - 1} = -f(x) - 1 \;\Rightarrow\; f(1-x) + f(x) = -1$$

Demak $f\left(\frac{2019}{2020}\right)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=-1.$

2 – masala. Aytaylik $x^2+x+1=0$ bo‘lsin. U holda yig‘indini hisoblang:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)^2$$

Yechimi: Berilgtan shartga ko‘ra $x^2+x+1=0 \;\Rightarrow\; x+\frac{1}{x}=-1$. Demak $x^2+\frac{1}{x^2}=-1$. Bundan tashqari

$$x^k+\frac{1}{x^k}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)-\left(x^{k-2}+\frac{1}{x^{k-2}}\right)$$

ayniyatga ko‘ra quyidagilarni topamiz:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=-1$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=-1$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)-\left(x^4+\frac{1}{x^2}\right)=2$$

U holda

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)^2=1+1+4+1+1+4=12.$$

3 – masala. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x+a+b+c}$ tenglamani yeching.

Yechimi. Tenglamada shakl almashtirib, quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x+a+b+c}-\frac{1}{x}$$

$$\frac{a+b+c}{(a+b)c}=-\frac{a+b+c}{(x+a+b+c)x}$$

1 – hol: Aytaylik $a+b+c=0$ bo‘lsin. U holda noldan farqli har qanday son tenglamani qanoatlantiradi.

2 – hol: $a+b+c\neq 0$ bo‘lsin. U holda

$x^2+(a+b+c)x+c(a+b)=0$

yoki

$$(x+c)(x+a+b)=0.$$

Demak $x\in\{c, a+b\}$.

4 – masala. $x^{x^x}=3$ tenglamani yeching.

Yechish: $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}}}=3$ ekanligi ayon. Qolaversa $f(x)=x^{x^x}$ bir qiymatli funksiya. Demak $x=\sqrt[3]{3}$ yagona yechim.

Fan olimpiadalari bo‘yicha iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash departamenti sizga omad tilaydi!