Wednesday, 31 May 2023

Problem 1. A parallelogram $ABCD$ with an acute angle A and $2AB = BC$ is given. Point P is a projection of point A on to line CD. Let point M be the midpoint of side BC. Prove that the sum of the angles PMD and BCD equals $90°$.

Proposed by Olimjon Olimov

Problem 2. 2023×2023 board is given. The king is placed in the upper right corner. In even-numbered moves, he repeats the last odd-numbered moves ($2nd$ move repeats the first one, $4th$ move repeats $3rd$ one, and so on). With such moves, can king go around the entire board exactly being in each cell only once?
Comment: The king moves any neighbor that has a common vertex or common side with the square he is on.

Proposed by Tohirbek Tulanov

Problem 3. Given sequence $\{a_n\}$ with $a_1 = 3$, and for any positive integer n the equality $a_{n+1} = 2a_1a_2 \dots a_n + 1$ holds. Prove that for any positive integer n the expression $1 + (a_n - 2)a_{n+1}$ is the cube of some integer.

Proposed by Sardor Gafforov

Problem 4. Positive integers from 1 to 100 are written on the board. Sardor is painting 10 of these numbers in red as the following: for any different a, b painted in red, $|a - b| > 2$. How many different ways can Sardor paint these numbers in red?

Proposed by Sardor Gafforov

Problem 5. Given the positive integers $x_1, x_2, \dots, x_k$ and $m_1, m_2, \dots, m_k$ where $k > 1$. For each positive integer $1 \le i \le k$, $m_i \ge 2023x_i$ holds. If there is a positive integer z satisfying the equality $x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \dots + x_k^{m_k} = z^{m_1m_2\dots m_k}$, then prove that $k \ge 2^{2023}$.

Proposed by Sardor Gafforov

Time: 4 hours.
Each problem is worth 10 points.

KHWARIZMI
INTERNATIONAL JUNIOR MATHEMATICAL OLYMPIAD

Chorshanba, 2023 yil 31-may

1-masala. A burchagi o'tkir bo'lgan $ABCD$ parallelogram berilgan, bunda $2AB = BC$. A nuqtadan CD chiziqqa tushirilgan perpendikular asosi P nuqta. BC ning o'rtasi M nuqta. PMD va BCD burchaklarning yig'indisi $90°$ ga tengligini isbotlang.

Muallif: Olimjon Olimov

2-masala. 2023×2023 doska berilgan. Uning yuqori o'ng burchagida shoh turibdi. Shoh noodatiy tarzda yuradi. Toq yurishida qaysi yo'nalishga yursa undan keyingi yurishida avvalgisini takrorlaydi (2-yurishda 1-yurishni takrorlaydi, 4-yurishda 3-yurishni takrorlaydi va hokazo). Bunday yurishlar bilan har bir katakda aynan bir martadan bo'lib butun doskani aylanib chiqa oladimi?
Izoh: Shoh har bir qadamda o'zi turgan katak bilan umumiy uchga yoki umumiy tomonga ega bo'lgan bironta qo'shni katakka o'ta oladi.

Muallif: Tohirbek To'lanov

3-masala. $\{a_n\}$ ketma-ketlik berilgan. $a_1 = 3$ va ixtiyoriy n natural soni uchun $a_{n+1} = 2a_1a_2 \ldots a_n + 1$ tenglik o'rinli. U holda ixtiyoriy n natural soni uchun $1 + (a_n - 2)a_{n+1}$ ifoda qandaydir butun sonning kubiga teng ekanligini isbotlang.

Muallif: Sardor G'afforov

4-masala. 1 dan 100 gacha bo'lgan natural sonlar doskada yozilgan. Sardor shu sonlardan 10 tasini qizil rangga quyidagi tartibda bo'yayapti: qizil rangga bo'yalgan ixtiyoriy turli a, b sonlar uchun $|a - b| > 2$ tengsizlik o'rinli. Sardor ushbu sonlarni jami necha xil usulda qizil rangga bo'yay oladi.

Muallif: Sardor G'afforov

5-masala. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ va $m_1, m_2, \ldots, m_k$ natural sonlar berilgan, bunda $k > 1$. Ixtiyoriy $1 \le i \le k$ uchun $m_i \ge 2023x_i$ shart o'rinli. Agar $x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \cdots + x_k^{m_k} = z^{m_1 m_2 \ldots m_k}$ tenglikni qanoatlantiruvchi z natural son mavjud bo'lsa, u holda $k \ge 2^{2023}$ ni isbotlang.

Muallif: Sardor G'afforov

Ajratilgan vaqt 4 soat
Har bir masala 10 ball bilan baholanadi

KHWARIZMI
INTERNATIONAL JUNIOR MATHEMATICAL OLYMPIAD

Среда, 31 мая 2023 г.

Задача 1. Дан $ABCD$ параллелограмм с острым углом A, в котором $2AB = BC$. Из точки A на прямую CD опустили перпендикуляр основание которой точка P. Если точка M - середина стороны BC, докажите что сумма углов PMD и BCD равна $90°$.

Задача 2. Дана клетчатая доска 2023×2023. В верхнем правом углу стоит король. Король двигается необычным образом. В какую бы сторону не передвинулся король в нечетном ходу, в следующем четном ходу он повторяет предыдущий ход (второй ход повторяет первый ход, четвертый ход повторяет третий ход и так далее). Можно ли таким образом обойти всю доску побывав в каждой клетке только один раз?
Примечание: Король в каждом ходу может перейти на соседнюю клетку имеющий общую вершину или общую сторону.

Задача 3. Дана последовательность $\{a_n\}$. $a_1 = 3$ и для каждого натурального n выполняется равенство $a_{n+1} = 2a_1a_2\dots a_n + 1$. Докажите что для произвольного натурального n выражение $1 + (a_n - 2)a_{n+1}$ является кубом целого числа.

Задача 4. На доске написаны натуральные числа от 1 до 100. Сардор раскрашивает 10 из них в красный цвет следующим образом: для любых различных a, b закрашенных в красный цвет выполняется неравенство $|a - b| > 2$. Сколькими способами Сардор может закрасить эти числа в красный цвет?

Задача 5. Даны натуральные числа $x_1, x_2, \dots, x_k$ и $m_1, m_2, \dots m_k$ где $k > 1, k \in \mathbb{N}$. Для произвольного натурального $1 \le i \le k$ выполняется $m_i \ge 2023x_i$. Если существует натуральное число z удовлетворяющий равенству

$$x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \dots + x_k^{m_k} = z^{m_1 m_2 \dots m_k}$$

Докажите $k \ge 2^{2023}$.

Время на работу: 4 часа.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

Al Khwarizmi international

junior mathematical Olympiad

Second day

Thursday, 1. June 2023

Part 1: each problem is worth 1.9 points

1. In rebus $UZBEK + IS + TAN$ different letters represent different numbers and same letters represent same numbers. Find the largest possible value of that sum $UZBEK + IS + TAN$?

A) 99631 B) 99190 C) 99387 D) 99423

2. Babur has stones weighing 1 kg, 2 kg, ..., 16 kg and three boxes A, B, C. He put two stones in each box so that the total weight of the stones in each box was M kg. Find the number of all possible values of M.

A) 21 B) 24 C) 19 D) 15

3. Anora wrote 5 integer numbers on the paper. From these numbers, Anora calculated the arithmetic mean of all groups with 4 numbers and got the numbers 37, 44, 25, 46 and 68 as a result. Find the largest number Anora wrote on the paper.

A) 147 B) 120 C) 68 D) 95

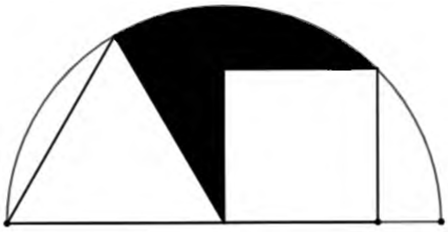
4. 1·2·3·… ·29·30 at least how many of the multipliers can be deleted to form a perfect square?

A) 7 B) 6 C)5 D) 4

5. Numbers from 1 to 2023 are written on the board. At each step, two arbitrary numbers are erased and their difference is written instead. This is done until there is only one number left at the end of the work. Which of the following cannot be the remaining number at the end?

A) 16 B) 1024 C) 2023 D) 2048

6. An equilateral triangle and a square are drawn inside a semicircle with a diameter of 10 cm as shown in the picture. What is the area of the painted part in cm^2?



A) $\frac{25\pi-150}{24}$ B) $\frac{25\pi-150}{12}$ C) $\frac{125\pi-150}{24}$ D) $\frac{45\pi-50}{8}$

7. Find the 1st digit of the smallest number which is divisible by 11 and whose sum of digits is 2023.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6

8. Given 5 consecutive positive integers. If the LCM of the first three numbers is less than twice the LCM of the last two numbers, find the largest value of the sum of these 5 consecutive numbers.

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50

9. For the 4-digit number $\overline{abcd}$ function is defined and $f(\overline{abcd}) = a * b * c + d$. For example $f(6542) = 6 * 5 * 4 + 2 = 122$. What is the result of $f(2023) - f(2022) + f(2021) - f(2020) + \cdots + f(1003) - f(1002)$?

A) 509 B) 495 C) 517 D) 511

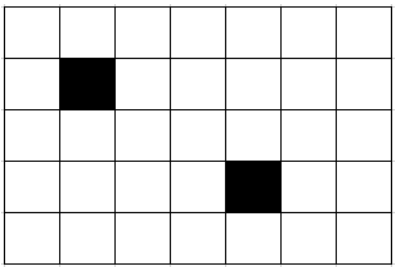
10. Find the smallest positive integer n such that 2023n has exactly 66 positive integer divisors.

A) 2^{33} B) 9216 C) 216 D) 1024

Part 2: each problem is worth 3.1 points

11. There is one rectangular piece of paper on the table. At each step, Olim chooses one of the largest pieces of paper on the table, divides it into two equal pieces and puts them back on the table. After 2023 steps, if the area of the smallest paper on the table is 1 cm^2, what is the area of the initial rectangular paper?

12. How many rectangles are there in the following figure whose sides lie on the lines of this figure and contain at least 1 black square?



13. 1000 straight lines are given and the intersection point of any 2 of them is marked. Find the maximum number of these marked points which can lie on one circle?

14. Given a parallelogram ABCD. The midpoint of AD is M. The projection of point B intersects the side CM at the point P. If ∠APB=61°, what is the angle ∠PAB?

15. Sardor created one number by writing even numbers from 23 to 2023 in a row. Then he deleted all the odd digits in the decimal notation of this number. How many digits are left?

16. Find the number of integer triples (a, b, c) satisfying the following conditions:

$2 \leq a, b, c \leq 8$ and $1 \leq d \leq 12$, $a + b + c + d = 30$.

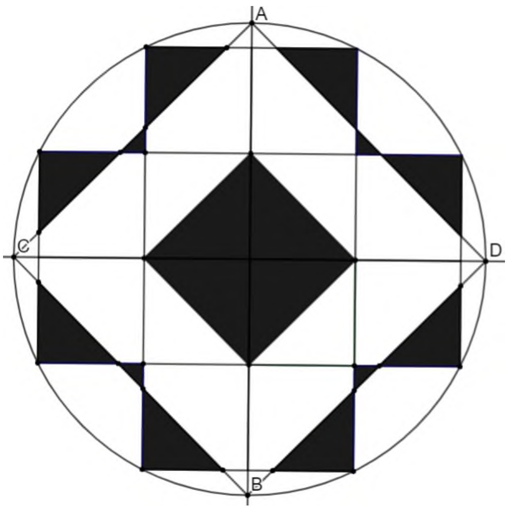
17. The following is appropriate for $\{A_n\}$ sequence of integer numbers:

$$A_{10} < 10 \text{ and } 1 \leq A_1 \leq 2023$$

$$A_{n+1} = \begin{cases} \frac{A_n}{2}, & \text{if } A_n \textit{ is even number} \\ A_n^2 + 1, & \text{if } A_n \textit{ is odd number} \end{cases}$$

Find the number of all possible values of A_1.

18. 12 small squares whose sides are parallel to the diameters AB and CD of the circle (AB and CD are perpendicular to each other) are drawn as shown in the picture. AC, AD, BC, BD are the chords of the circle. Find the area of the painted area.



19. Anvar wrote the numbers 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13 in these circles and squares. Each number must be written exactly once. In this case, the number in each circle is equal to the sum of the numbers in its two neighboring squares. If x and y are arranged as follows, find the largest value of x+y.

$\boxed{x}$ ○ □ ○ □ ○ □ ○ $\boxed{y}$

20. 10 people came to the ticket office, 5 of them have \$5 and 5 have \$10 each, but the ticket seller has no money. One ticket costs \$5. How many ways can people line up in several different ways so that everyone who needs change (the remaining part of their money) can get it immediately after purchasing the ticket?

Language: English

Международная математическая олимпиада Аль-Хорезми
Второй день

1 июня 2023 года

Часть 1: Каждая задача оценывается по 1.9 баллов

1. В ребусе $\text{УЗБЕК} + \text{ИС} + \text{ТАН}$ разные буквы обозначают разные числа, а одни и те же буквы обозначают одни и те же числа. Найдите наибольшее возможное значение этой суммы $\text{УЗБЕК} + \text{ИС} + \text{ТАН}$?

A) 99631 B) 99190 C) 99387 D) 99423

2. У Бобура есть гири весом 1 кг, 2кг, …, 16кг и три коробки A, B, C. Он положил по две гири в каждую коробку, и оказалось что вес каждой коробки равен M кг. Сколько значений может принимать M?

A) 21 B) 24 C) 19 D) 15

3. Анора написала на листке 5 целых чисел. Она посчитала средние арифметические всех групп из четырех чисел составленные из этих чисел и получила результат 37, 44, 25, 46 и 68. Найдите наибольшее число которая написала Анора?

A)147 B) 120 C) 68 D) 95

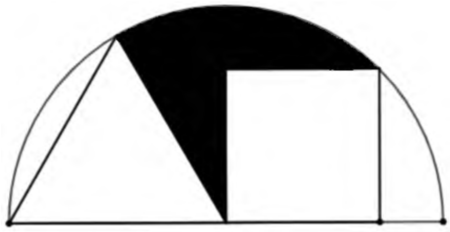
4. Какое минимальное количество множителей можно стереть из произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 29 \cdot 30$ чтобы получить точный квадрат.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

5. На доске написаны числа от 1 до 2023. За один ход стирается 2 любых числа и вместо них записывается их разность. Такие действия продолжаются пока не останется одно число. Какое из чисел не может быть последним оставшимся числом?

A) 16 B) 1024 C) 2023 D) 2048

6. В полуокружность диаметром 10 см вписаны равносторонний треугольник и квадрат, как показано на рисунке. Найдите площадь заштрихованной части?



A) $\frac{25\pi-150}{24}$ B) $\frac{25\pi-150}{12}$ C) $\frac{125\pi-150}{24}$ D) $\frac{45\pi-50}{8}$

7. Найдите первую цифру наименьшего числа который делится на 11 и сумма цифр которой равна 2023.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6

8. Даны 5 последовательные натуральные числа. Если НОК первых трех из них меньше удвоенного НОКа последних двух, найдите наибольшее значение суммы этих 5ти чисел.

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50

9. Для четырехзначного числа $\overline{abcd}$ определена функция f и $f(\overline{abcd}) = a * b * c + d$ Например $f(6542) = 6 * 5 * 4 + 2 = 122.$ Найдите значение

$$f(2023) - f(2022) + f(2021) - f(2020) + \cdots + f(1003) - f(1002)$$

A) 509 B) 495 C) 517 D) 511

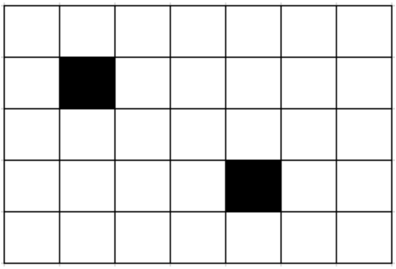
10. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором число $2023n$ имеет точно 66 натуральных делителей.

A) 2^{33} B) 9216 C) 216 D) 1024

<u>Часть 2: Каждая задача оценывается по 3.1 баллов</u>

11. На столе лежит лист прямоугольной формы. Олим за каждый шаг выбирает один из наибольших прямоугольников, делит его на две равные части и ложит их обратно на стол. Если через 2023 шагов площадь наименьшего листа 1 cm^2, найдите площадь первоначального листа?

12. Сколько прямоугольников можно выделить в данной фигуре, стороны которого лежат на линиях фигуры и который включает в себя хотябы одну черную клетку?



13. Даны 1000 прямых и отмечена точка пересечения любых двух из них. Какое наибольшее количество таких точек может лежать на одной окружности?

14. Дан параллелограмм ABCD. Середина AD точка M. Точка P основание перпендикуляра опущенного из точки B на CM. Если $\angle APB = 61^o$, найдите угол $\angle PAB$.

15. Сардор написал в один ряд четные числа от 23 до 2023 и получил новое число. Потом он стёр все нечетные цифры в десятичной записи этого числа. Сколько цифр осталось?

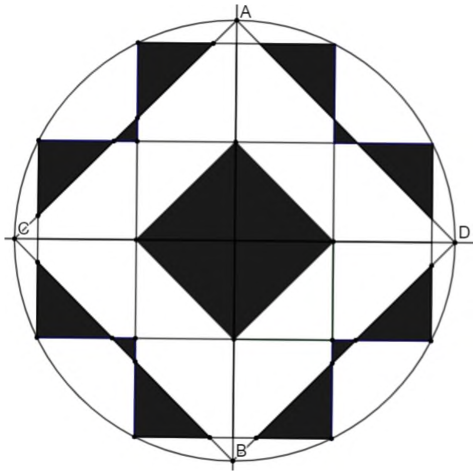
16. Найдите количество троек целых чисел (a, b, c) удовлетворяющий условиям $2 \leq a, b, c \leq 8$ и $1 \leq d \leq 12$, $a + b + c + d = 30$.

17. Для последовательности целых чисел $\{A_n\}$ выполняется следующие условия: $A_{10} < 10$ и $1 \leq A_1 \leq 2023$

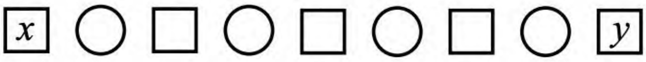
$$A_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{A_n}{2}, & \text{если } A_n \text{ четное число} \\ A_n^2 + 1, & \text{если } A_n \text{ нечетное число} \end{cases}$$

Найдите количество всех значений, которые может принимать A_1.

18. К перпендикулярным диаметрам AB и CD нарисованы 12 маленьких квадратов стороны которых параллельны диаметрам AB и CD как показано на рисунке. В окружности проведены AC, AD, BC, BD хорды. Найдите площадь закрашенной части.



19. Анвар написал числа 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13 в окружности и квадраты. Каждое число записывается ровно один раз. При этом число, написанное в любой окружности равен сумме чисел, написанных в соседних квадратах. Найдите наибольшее значение $x + y$.



20. В кассу пришли 10 покупателей, у 5 из них есть по 5$ и у 5 из них есть по 10$, а у кассира нет денег. Стоимость одного билета 5$. Сколькими способами можно расположить покупателей так чтобы, каждый покупатель который должен получить сдачу смог её получить. (Каждый покупатель получает сдачу сразу после покупки.)

Yoshlar o'rtasida xalqaro Al-Xorazmiy olimpaiadasi
2-kun
2023 yil 1-Iyun

1-qism: har bir test 1.9 ball bilan baholanadi

1. $UZBEK + IS + TAN$ turli harflar turli raqamlarni ifodalaydi Berilgan yig'indining qabul qilishi mumkin bo'lgan eng katta qiymatini toping.

A) 99631 B) 99190 C) 99387 D) 99423

2. Boburda og'irliklari 1 kg, 2 kg, …,16 kg bo'lgan toshlar va uchta A, B, C qutilar bor. U har bir qutiga ikkitadan toshni soldi. Shu 3 ta qutining har biridagi toshlarning umumiy og'irligi M kg ga teng bo'ldi. M ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari sonini toping.

A) 21 B) 24 C) 19 D) 15

3. Anora qog'ozga 5 ta butun sonni yozdi. U bu sonlardan barcha 4 sondan iborat guruhlarining o'rta arifmetiklarini hisobladi va natijada 37, 44, 25, 46 va 68 sonlarini oldi. Anora qog'ozga yozgan sonlarning eng kattasini toping.

A) 147 B) 120 C) 68 D) 95

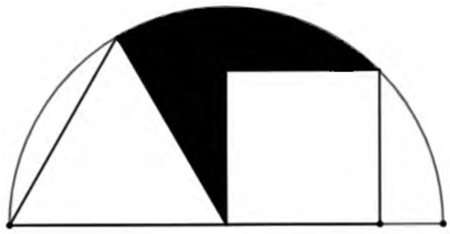
4. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 29 \cdot 30$ ko'paytuvchilardan kamida nechtasini o'chirib aniq kvadrat hosil qilish mumkin?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

5. 1 dan 2023 gacha sonlar doskada yozilgan. Har bir qadamda ixtiyoriy ikkita son o'chirilib o'rniga ularning farqi yoziladi. Bu ish oxirida bitta son qolguncha amalga oshiriladi. Oxirida qolgan son quyidagilarning qaysi biri bo'la olmaydi?

A) 16 B) 1024 C) 2023 D) 2048

6. Muntazam uchburchak va kvadrat diametri 10 cm bo'lgan yarim aylanaga rasmda ko'rsatilgandek ichki chizilgan. Bo'yalgan soha yuzi necha cm^2?



A) $\frac{25\pi-150}{24}$ B) $\frac{25\pi-150}{12}$ C) $\frac{125\pi-150}{24}$ D) $\frac{45\pi-50}{8}$

7. Raqamlari yig'indisi 2023 ga teng va 11 ga bo'linadigan eng kichik sonning 1-raqamini toping.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6

8. 5 ta ketma-ket kelgan natural sonlar berilgan. Agar bu sonlarning dastlabki uchtasining EKUKi oxirgi ikkita sonning EKUKining ikkilanganindan kichik bo'lsa, shu 5 ta ketma-ket kelgan sonlar yig'indisining eng katta qiymatini toping.

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50

9. $\overline{abcd}$ to'rt xonali son uchun uchun f- funksiya aniqlangan va $f(\overline{abcd}) = a*b*c+d$

Masalan $f(6542) = 6*5*4+2 = 122.$ $f(2023) - f(2022) + f(2021) - f(2020) + \cdots + f(1003) - f(1002)$ ni toping.

A) 509 B) 495 C) 517 D) 511

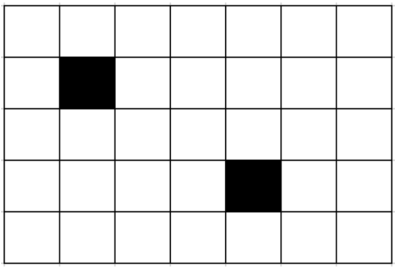
10. Eng kichik n natural sonni toping, bunda $2023n$ soni aynan 66 ta natural bo'luvchiga ega bo'lsin.

A) 2^{33} B) 9216 C) 216 D) 1024

<u>2-qism: har bir test 3.1 ball bilan baholanadi</u>

11. Stol ustida bitta to'g'ri to'rtburchak shaklidagi qog'oz bor. Olim har bir qadamda shu stol ustida turgan eng katta qog'ozlardan birini tanlab olib teng ikkiga bo'lib bo'laklarni qaytib stol ustiga qo'yadi. 2023 ta qadamdan keyin stol ustidagi eng kichik qog'ozning yuzi 1 cm^2 bo'lsa, boshlang'ich holatdagi qog'oz yuzi necha cm^2?

12. Quyidagi shaklda tomonlari ushbu shakldagi chiziqlarda yotadigan kamida 1 ta qora katakni o'z ichiga oladigan nechta to'g'ri to'rtburchak bor?



13. 1000 ta to'g'ri chiziq berilgan va ularning ixtiyoriy 2 tasini kesishgan nuqtasi belgilangan. Bu nuqtalardan ko'pi bilan nechtasi 1 ta aylanada yotishi mumkin?

14. $ABCD$ parallelogram berilgan. AD ning o'rtasi M nuqta. B nuqtadan CM ga tushurilgan balandlik asosi P nuqta. $\angle APB = 61°$ bo'lsa, $\angle PAB$ burchakni toping.

15. Sardor 23 dan 2023 gacha bo'lgan juft sonlarni bir qatorga ketma-ket yozib yangi bitta son hosil qildi. Keyin bu sonning o'nli yozuvidagi barcha toq raqamlarni o'chirib chiqdi. Nechta raqam qoldi?

16. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi (a, b, c) butun uchliklar sonini toping.

$2 \leq a, b, c \leq 8$ va $1 \leq d \leq 12$, $a + b + c + d = 30$.

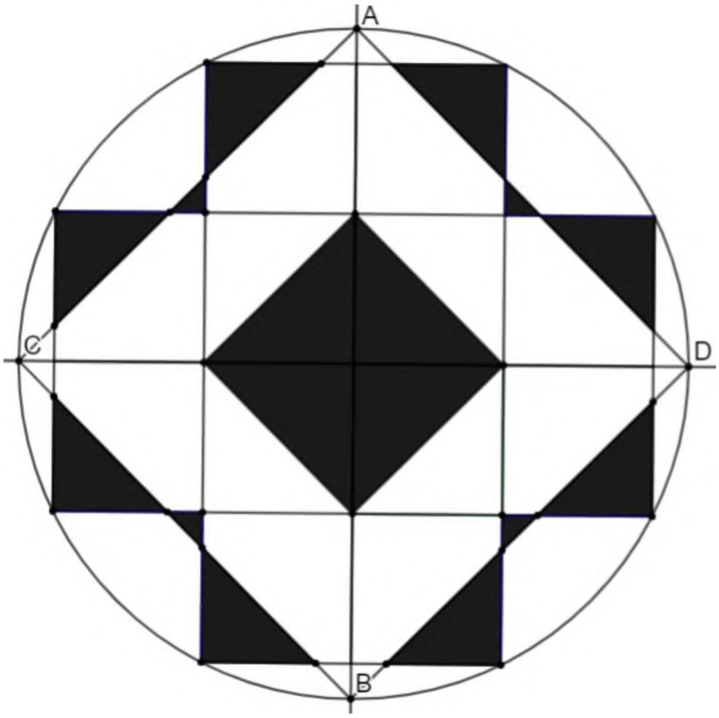
17.$\{A_n\}$ butun sonlar ketma ketligi uchun quyidagilar o'rinli:

$$A_{10} < 10 \text{ va } 1 \leq A_1 \leq 2023$$

$$A_{n+1} = \begin{cases} \frac{A_n}{2}, A_n \; juft \; son \\ A_n^2 + 1, A_n \; toq \; son \end{cases}$$

A_1 ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar sonini toping.

18. Aylananing AB va CD o'zaro perpendikular diametrlariga tomonlari parallel bo'lgan 12 ta kichkina kvadratlar rasmdagidek qilib chizilgan. Aylananing AC, AD, BC, BD vatarlari o'tkazilgan. Bo'yalgan sohani yuzini toping.



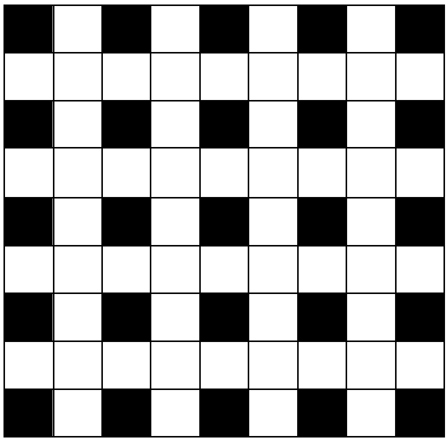
19. Anvar $1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13$ sonlarini ushbu aylana va katakchalarga yozib chiqdi. Har bitta son aynan bir martadan yozilishi shart. Bunda ixtiyoriy aylanadagi son o'zining ikkita qo'shni kvadratchalaridagi sonlar yig'indisiga teng. x va y quyidagidek joylashtirilgan bo'lsa, $x + y$ ning eng katta qiymatini toping.

$\boxed{x}$ ○ □ ○ □ ○ □ ○ $\boxed{y}$

20. Chiptaxonaga 10 ta odam keldi 5 tasida $5 dan va 5 tasida $10 dan pul bor, chiptachida esa pul yo'q. Bitta chipta narxi $5. Odamlar navbatta necha xil usulda turishi mumkin, bunda sotuvchi to'lov qilgan har bir odamga o'sha paytning o'zidayoq qaytim bera olsin.

Solutions of Khwarizmi international junior mathematical olympiad

1. $\angle C = \angle A = 2\alpha$. $M \equiv \frac{BC}{2} \Longrightarrow AB = BM = MC = CD \Longrightarrow \angle DMC = 90^0 - \alpha$ and $\angle ABM = 180^0 - 2\alpha \;\Longrightarrow\; \angle BMA = \alpha \Longrightarrow$
$\angle AMD = 90^0 \Longrightarrow\; \angle AMD + \angle APD = 180^0 \Longrightarrow\; AMDP -$ cyclic $\angle PMD + \angle AMP = 90^0$ and $\angle AMP = \angle ADP, AD \parallel BC \;\Longrightarrow\; \angle BCP = \angle ADP \Longrightarrow \angle BCD + \angle PMD = 90^0$
2. We color the board as follows:



In this coloring, the king begins with a black cell, and after every even move, it will be on a black cell. Also, after every odd moves the king will be on white cell. There are 1012×1012 black cells and $2023 \times 2023 - 1012 \times 1012$ white cells on the board. So if the king finishes on black cell, it will have crossed $1012 \times 1012 - 1$ white cells and if the king finishes on white cells, it will have crossed 1012×1012 white cells. But the number of white are much more than 1012×1012. So the king can not cross all white cells.
3. $a_{n+1} = 2a_1a_2 \dots a_n + 1 = (a_n - 1)a_n + 1$ because $a_n - 1 =$
$= 2a_1a_2 \dots a_{n-1}$. So $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \Longrightarrow 1 + (a_n - 2)a_{n+1} = 1 + (a_n - 2)(a_n^2 - a_n + 1) = 1 + a_n^3 - a_n^2 + a_n - 2a_n^2 + 2a_n - 2 = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 = (a_n - 1)^3$
4. Let $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ are colored numbers. And $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{10}$. Let us define as follows: $d_i \in \mathbb{N}_0$

$$|a - b| > 2 \Longrightarrow\; |a - b| \geq 3$$
$$a_2 = a_1 + 3 + d_1$$
$$a_3 = a_2 + 3 + d_2 = a_1 + 6 + d_1 + d_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{10} = a_1 + 27 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_9$$

$a_{10} \leq 100, \Longrightarrow\; a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_9 \leq 73$
$a_1 \geq 1$, so there exists $d_0 \geq 0$, such that $a_1 = d_0 + 1$

$$d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_9 \leq 72$$

This means there exists an integer $d_{10} \geq 0$ such that

$$d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_9 + d_{10} = 72$$

Lemma: The number of non-negative solutions of equation $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m=n$ is C_{m+n-1}^{m-1}.

Proof: $m+n-1$ '1's are written on a row. Let's choose $m-1$ of them and change to '0'. So there are C_{m+n-1}^{m-1} ways.

On the other hand, these $m-1$ '0's divide the '1's into m groups. The number of '1's in groups are $x_1, x_2, \ldots x_m$ And n '1's remain. So This is also the number of all solutions of equation $x_1+x_2+\cdots x_n=m$

So, the answer is C_{82}^{10}.

5. $x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots+x_k^{m_k}=z^{m_1m_2\ldots m_k}$, $m_i \geq 2023x_i$

Let $x_i^{m_i}$ is the largest of $\{x_1^{m_1}; x_2^{m_2}; \ldots; x_k^{m_k}\}$

$$z^{m_1m_2\ldots m_k}=A^{m_i} \Rightarrow A \geq x_i+1 \Rightarrow kx_i^{m_i} \geq z^{m_1m_2\ldots m_k} \geq (x_i+1)^{m_i}$$

$$kx_i^{m_i} \geq (x_i+1)^{m_i} \Rightarrow k \geq \left(1+\frac{1}{x_i}\right)^{m_i} \geq \left(1+\frac{1}{x_i}\right)^{2023x_i}$$

And

$$\left(1+\frac{1}{x_i}\right)^{x_i} \geq 1+\binom{x_i}{1}\cdot 1\cdot\frac{1}{x_i}=2$$

So $k \geq 2^{2023}$.

Proved.

Marking scheme (english version)

Problem 1

- If $\angle AMD = 90°$ is showed +4 points
- $AMDP$ is cyclic +2 points
- Complete solution 10 points

Problem 2

- No points the right answer, saying no.
- For any coloring (like a chessboard) and eliminating cases(like here is no double move at the diagonal direction ,etc) +4 points
- For a right coloring +6 points
- Full solution 10 points

Problem 3

- Complete solution without proof of $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ 6 points
- If $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ equality is proved 7 points
- Complete solution 10 points

Problem 4

Solution 1:

Let $d_i = a_{i+1} - a_i$

- $a_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_9 \leq 100$ +1 point
- Resign and find $x_1 + x_2 + \cdots x_{10} \leq 72$ +2 point
- Add elevens term to holds equality x_{11} , $x_1 + x_2 + \cdots x_{10} + x_{11} = 72$ +2 point
- Number of solutions of equation $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n$ equals C_{m+n-1}^{m-1} is proved +2 point
- C_{82}^{10} is founded as an answer +1 point
- Complete solution 10 point

Solution 2:

Let $d_i = a_{i+1} - a_i$.

- $a_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_9 \leq 100$ +1 point
- Resign and find $x_1 + x_2 + \cdots x_{10} \leq 72$ +2 point
- Number of solutions of equation $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n$ equals C_{m+n-1}^{m-1} is proved +2 point
- If answer remains as $C_{81}^9 + C_{80}^9 + \cdots + C_9^9$ +1 point
- $C_p^r + C_{p-1}^r + \cdots + C_r^r = C_{p+1}^{r+1}$ is proved +3 point
- C_{82}^{10} is founded as an answer +1 point
- Complete solution 10 point

5-masala.

- For choosing $x_s^{m_s} = \max(x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_k^{m_k})$ + 1 point
- For proof of $x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \cdots + x_k^{m_k} \geq (x_i + 1)^{m_i}$ +4 points
- For inequality $k \geq \left(1 + \frac{1}{x_s}\right)^{2023x_s}$ +1 point
- Full solution 10 points

For minor mistakes on calculation and etc. upto 3 points can be deducted.