Xalq ta'limi vazirligi Fan olimpiadalari bo'yicha iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash departamentining matematika fanidan haftalik topshiriqlarining yechimlari

10-11 sinf o'quvchilari uchun

1 – masala. Nodir berilgan 3-darajali ko'phadlar ustida quyida almashtirishlardan birini bajaradi:

a) Ko'phadning koeffitsiyentlarini teskari tartibda o'rinlarini almashtiradi, masalan

$$x^3+x^2+3x-2 \;\Rightarrow\; -2x^3+3x^2+3x+1$$

b) $P(x) \;\Rightarrow\; P(x+1)$ almashtirish bajaradi.

U holda Nodir chekli almashtirishlardan so'ng x^3-2 ko'phaddan x^3-3x^2+3x-3 ko'phadni hosil qila oladimi?

Yechimi: $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ko'phad uchun $\Delta P=3ad-bc$ operatorni qaraylik.

a) almashtirishga ko'ra

$$P(x)\Rightarrow P(x)=dx^3+cx^2+bx+a\Rightarrow \Delta P=3da-cb=\Delta P$$

b) alamshtirishga ko'ra

$$P(x)\Rightarrow P(x)=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3a+2b)x+(d+a+b+c)\Rightarrow$$

$$\Delta P=3(d+a+b+c)a-(b+3a)(c+3a+2b)=\Delta P-2(b^2+3ab+3a^2)<\Delta P.$$

Demak Δ operatorimiz almashtirishlardan so'ng oshmas ekan. Endi masaladagi ko'phadlarni qaraylik:

$$P_1(x)=x^3-2 \;\Rightarrow\; \Delta P_1=3\cdot1\cdot(-2)-0\cdot0=-6$$

$$P_2(x)=x^3-3x^2+3x-3 \;\Rightarrow\; \Delta P_2=3\cdot1\cdot(-3)-(-3)\cdot3=0$$

U holda $\Delta P_1 < \Delta P_2$ ziddiyatni hosil qilamiz.

2 – masala. $\triangle ABC$ uchburchak ichida ixtiyoriy P nuqta olingan. PU, PV, PW kesmalar mos ravishda $\angle BPC$, $\angle CPA$, $\angle APB$ burchaklarning bissektrisalari bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$AP + BP + CP \geq 2(PU + PV + PW)$$

Yechimi: Bu tengsizlikni isbotlash uchun quyidagi lemmadan foydalanamiz.

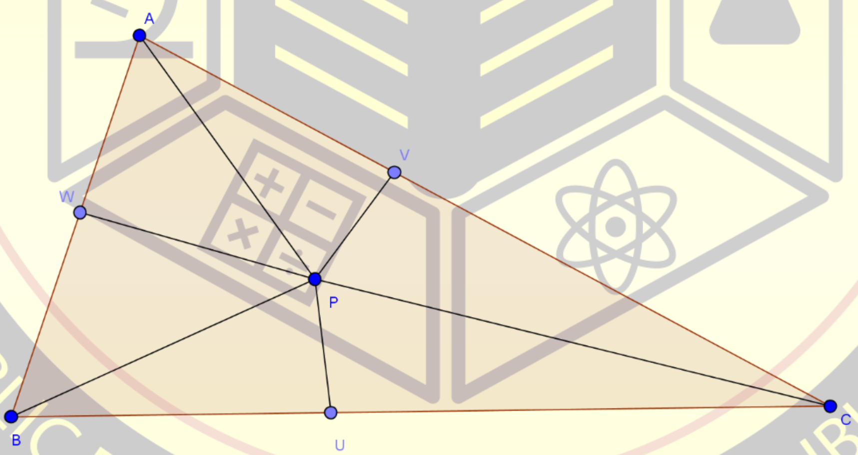
Lemma: α, β, γ burchaklar $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ shartni qanoatlantiradi. U holda ixtiyoriy haqiqiy x, y, z sonlar uchun quyidagi tengsizlik o’rinli

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy\cos\gamma + xz\cos\beta + yz\cos\alpha)$$

Lemmaning isboti: Sodda algebraik almashtirishlardan so‘ng bu tengsizlik quyidagiga teng kuchli:

$$(x - (y\cos\gamma + z\cos\beta))^2 + (y\sin\gamma - z\sin\beta)^2 \geq 0$$

Bu esa ravshan tengsizlik.



Endi Barrov tengsizligining isbotiga o‘tamiz. Qulaylik uchun

$$AP = x^2,\ BP = y^2,\ CP = z^2$$

va

$$\angle BPC = 2\alpha,\ \angle APC = 2\beta,\ \angle APB = 2\gamma$$

deb belgilaylik. U holda $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ tenglik o‘rinli. $\triangle BPC$ uchburchakda bissektrisa formulasini qo‘llab

$$PU=\frac{2PC\cdot PB}{PC+PB}\cos\frac{\angle BPC}{2}=\frac{2y^2z^2}{y^2+z^2}\cos\beta \quad (2)$$

ga ega bo‘lamiz. Musbat y, z sonlar uchun o‘rinli bo‘lgan $\frac{2y^2z^2}{y^2+z^2}\le yz$ tengsizlikdan foydalanib,

$$PU=\frac{2y^2z^2}{y^2+z^2}\cos\beta\le yz\cos\beta$$

munosabatni hosil qilamiz. Demak

$$2(PU+PV+PW)\le 2(xy\cos\gamma+xz\cos\beta+yz\cos\alpha).$$

Endi lemmadan foydalanib,

$$2(PU+PV+PW)\le 2(xy\cos\gamma+xz\cos\beta+yz\cos\alpha)\le x^2+y^2+z^2=AP+BP+CP$$

tengsizlikni hosil qilamiz, ya’ni Barrov tengsizligi isbotlandi.

3 – masala. Quyidagi tenglamaning barcha butun yechimlarini toping:

$$4x^3+4x^2y-15xy^2-18y^3-12x^2+6xy+36y^2+5x-10y=0$$

Yechimi: Berilgan tenglamani ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x-2y)(2x+3y-5)(2x+3y-1)=0$$

Har bir qavsni nolga tenglab, quyidagi yechimlar oilasini tashkil qilamiz:

Javob: $(x,y)\in\{(2k,k),(-3k+1,2k+1),(-3k-1,2k+1)\}$

4 – masala. Aytaylik $S(n)$ bilan n natural sonning raqamlari yig‘indisi belgilaylik. U holda $S(S(S(S(2020^{2020}))))$ ni toping.

Yechimi: Har bir natural son uchun $S(a) \le 9([\lg a]+1)$ tengsizlik o‘rinli. Bundan foydalib quyidagilarni topamiz:

$$S(2020^{2020}) \le 9([2020\lg 2020]+1) = 60093$$

$$S(S(2020^{2020})) \le 9([\lg 60093]+1) = 45$$

$$S(S(S(2018^{2018}))) \le 9([\lg 45]+1) = 18$$

Boshqa tomondan

$$2020^{2020} \equiv 4^{2018} = 2^{4036} = (2^3)^{1345} \cdot 2 \equiv 7 \ (\bmod 9)$$

Demak

$$S(S(S(2020^{2020}))) \in \{7,16\} \Rightarrow S(S(S(S(2020^{2020})))) = 7.$$

Javob: 7

5 – masala. Aytaylik $\triangle ABC$ uchburchakning BC, CA, AB tomonlariga tashqi tomondan yasalgan muntazam uchburchaklar mos ravishda $\triangle XBC$, $\triangle YCA$, $\triangle ZAB$ bo‘lsin:

(a) AX, BY, CZ kesmalar bitta nuqtada kesishishini isbotlang.

(b) Agar (a) shartdagi nuqta M bo‘lsa, u holda quyidagi tenglikni isbotlang:

$$MX + MY + MZ = 2(MA + MB + MC)$$

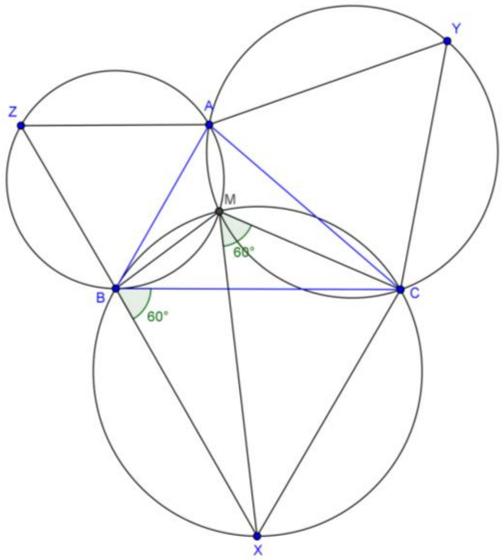
Yechimi: $\triangle$ Masalani konstruktiv usulda yechamiz.

$$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$$

shartni qanoatlantiruvchi M nuqtani olaylik. Bundan

$$\angle AMC + \angle AYC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

ekanligidan M nuqta muntazam $\triangle YCA$ uchburchakning tashqi chizilgan aylanasida yotadi. Xuddi shuningdek, M nuqta muntazam $\triangle XBC$, $\triangle ZAB$ uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanasida yotishini ko‘rsatish mumkin. Demak $\triangle XBC$, $\triangle YCA$, $\triangle ZAB$ uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar bitta M nuqtada kesishadi. Endi A, X, M nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlaymiz.



Bir xil yoyga tiralgan ichki burchaklar tengligidan

$$\angle CMX = \angle CBX = 60^\circ$$

tenglikka ega bo‘lamiz. U holda

$$\angle AMC + \angle CMX = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

yoki

$$A,\ X,\ M$$

nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi. Xuddi shu usulda BY va CZ to‘g‘ri chiziqlar ham M nuqtadan o‘tishini ko‘rsatish mumkin. Demak **(a)** qismi isbotlandi.

5 – haftalik topshiriqlarning 7-9 sinf o‘quvchilari uchun 5 – masalasidan foydalansak, quyidagi tengliklarni topamiz:

$$BM + CM = XM,\ AM + BM = ZM,\ CM + AM = YM$$

Ularni qo‘shib **(b)** qism isbotiga kelamiz.

7-9 sinf o‘quvchilari uchun

1 – masala. Aytaylik $\{a_n\}_{n\geq 0}$ ketma-ketlik uchun $a_0 = 3$ va $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ shartlar o‘rinli bo‘lsin. U holda quyidagi ifodaning qiymatini toping:

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{2020}}$$

Yechimi: Matematik induksiya orqali

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2^{n+1}-1}{3}$$

tenglikni isbotlash muammo emas. Demak

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_{2020}}=\frac{2^1-1+2^2-1+...+2^{2021}-1}{3}=\frac{2^{2022}-2023}{3}$$

Javob: $\frac{2^{2022}-2023}{3}$

2 – masala. Raqamlari yig‘indisidan 13 marta katta bo‘lgan natural sonni *ajoyib* son deylik. Barcha *ajoyib* sonlarni toping.

Yechimi: Ravshanki bir xonali ***ajoyib*** son mavjud emas. Agar ikki xonali son $\overline{ab}$ ***ajoyib*** bo‘lsa, u holda

$$10a+b=13(a+b)\ \Rightarrow\ 3a+12b=0$$

ya’ni yechim mavjud emas. Agar uch xonali son $\overline{abc}$ ***ajoyib*** bo‘lsa, u holda

$$100a+10b+c=13(a+b+c)\ \Rightarrow\ 29a=b+4c$$

Ko‘rish mumkinki, $b+4c$ ning eng katta qiymati 45 bo‘ladi, demak $a=1$. U holda

$$29=b+4c$$

Bu tenglamani yechib

$$(b,c)=(1,7);(5,6);(9,5)$$

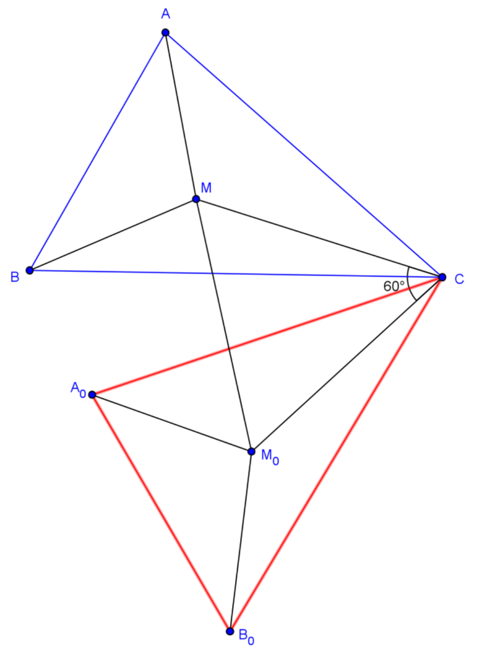
ni topamiz va 117, 156, 195 uch xonali ***ajoyib*** sonlar. Agar to‘rt xonali son $\overline{abcd}$ ***ajoyib*** bo‘lsa,

$$1000a+100b+10c+d=13(a+b+c+d)$$

Lekin chap taraf kamida 1000 va o‘ng tomon ko‘pi bilan $13\cdot 36=468$. Demak yechim mavjud emas. Nihoyat besh va undan ortiq xonali ***ajoyib*** son yo‘qligini ko‘rsatish qiyin emas. Chunki xonalar soni oshishi chap tomonga kamida 1000 qo‘shish degani, o‘ng tomonga esa ko‘pi bilan $13\cdot 9=117$ qo‘shiladi. Demak 117, 156, 195 barcha ***ajoyib*** sonlardir.

3 – masala. Aytaylik $\triangle ABC$ uchburchak ichida olingan M nuqta uchun $AM+BM+CM$ yig‘indi eng kichik qiymatga erishsin. U holda bu nuqtadan uchburchakni hamma tomoni teng burchak ostida ko‘rinishini isbotlang.

Yechimi: $\triangle ABC$ uchburchakni C uchi atrofida soat strelkasi yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda 60° ga buraylik.



Burish natijasida A, B, M nuqtalar mos ravishda A_0, B_0, M_0 nuqtalarga o‘tsin. Burish xossasiga ko‘ra $CM=CM_0$ va $\angle MCM_0=60^\circ$ tengliklar o‘rinli. Ya’ni $\triangle MCM_0$ muntazam uchburchak. U holda $f(M)$ yig‘indini $CM=MM_0$ va $BM=B_0M_0$ tengliklardan foydalanib,

$$f(M)=AM+MM_0+M_0B_0$$

ko‘rinishida yoza olamiz. Tayinlangan uchburchak $\triangle ABC$ uchun AB_0 kesma ham tayingan uzunlikka ega bo‘ladi. Boshqa tomondan uchburchak tengsizligidan

$$f(M)=AM+MM_0+M_0B_0\geq AB_0$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz va tenglik holi

$$A,\ M,\ M_0,\ B_0$$

nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotgandagina bajariladi. Buning uchun

$$\angle AMC+\angle CMM_0=180^\circ$$

va

$$\angle MM_0C + \angle CM_0B_0 = 180^\circ$$

tengliklar bajarilishi zarur. Lekin $\triangle MCM_0$ muntazam uchburchak edi. Demak $\angle CM_0B_0$ va $\angle AMC$ burchaklar 120° bo‘lishi kerak. $\angle CM_0B_0 = \angle CMB$ ekanligini hisobga olsak,

$$\angle AMC = \angle CMB = 120^\circ$$

tenglik bajarilishi zarur. Ya’ni

$$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$$

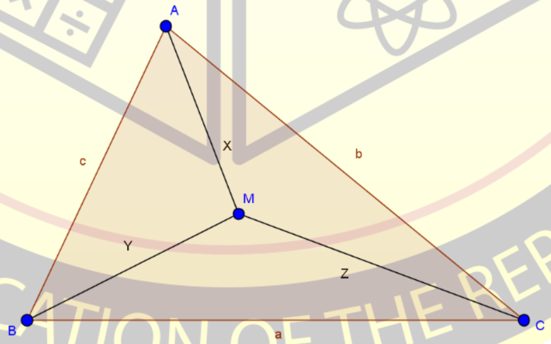
bo‘lishi zarur va yetarli.

4 – masala. Agar musbat haqiqiy x, y, z sonlar quyidagi

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2019^2 \\ y^2 + yz + z^2 = 2020^2 \\ z^2 + zx + x^2 = 2021^2 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantirsa, u holda $xy + yz + zx$ yig‘indini toping.

Yechimi: Masalani geometrik yasash orqali yechamiz. Masalaga mos chizma chizamiz:



Bu yerda

$$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$$

U holda kosinuslar teoremasiga ko‘ra

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120^\circ = x^2 + xy + y^2 = 2019^2$$

$$b^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos 120^\circ = x^2 + xz + z^2 = 2021^2$$

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cdot \cos 120^\circ = y^2 + yz + z^2 = 2020^2$$

tengliklar o‘rinli. Geron formulasiga $\triangle ABC$ uchburchak yuzi

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{3030 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdot 1011}$$

ga teng. Boshqa tomondan

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMC} = (xy + yz + zx) \cdot \sin 120^\circ \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$$

Bu tengliklardan

$$xy + yz + zx = \sqrt{3030 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdot 1011} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 4040\sqrt{1009 \cdot 1011}$$

natijani hosil qilamiz.

Javob: $4040\sqrt{1009 \cdot 1011}$

5 – masala. O‘tkir burchakli $\triangle ABC$ uchburchak ichida olingan O nuqtadan BC, CA, AB tomonlarga tushirilgan perpendikular asoslari mos ravishda D, E, F bo‘lsin. Agar $OA + OB + OC = 2(OD + OE + OF)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\triangle ABC$ muntazam uchburchak ekanligini isbotlang.

Yechimi: Biz quyidagi teoremani isbotlaymiz va masala yechimi shu bilan tugaydi.

Teorema: $\triangle ABC$ uchburchak ichida olingan O nuqtadan uning BC, CA, AB tomonlariga tushirilgan perpendikular asoslari mos ravishda D, E, F bo‘lsin. U holda

$$OA + OB + OC \geq 2(OD + OE + OF)$$

tengsizlik o‘rinli va tenglik holi faqat va faqat $\triangle ABC$ muntazam bo‘lganda bajariladi.

Isbot: BC kemaning EF to‘g‘ri chiziqqa proyeksiyasi HG kesma bo‘lsin. U holda proyeksiya xossasidan

$$BC \geq HG = HF + FE + EG$$

tengsizlikni hosil qilamiz. A, E, O, F nuqtalar AO diametrli aylanada yotishidan va vertikal burchaklar tengligidan

$$\angle AOE = \angle AFE = \angle BFH$$

munosabatni hosil qilamiz, ya'ni to‘g‘ri burchakli $\triangle BFH$ va $\triangle AOE$ uchburchaklar o‘xshash. Bundan

$$HF = \frac{OE}{OA} BF$$

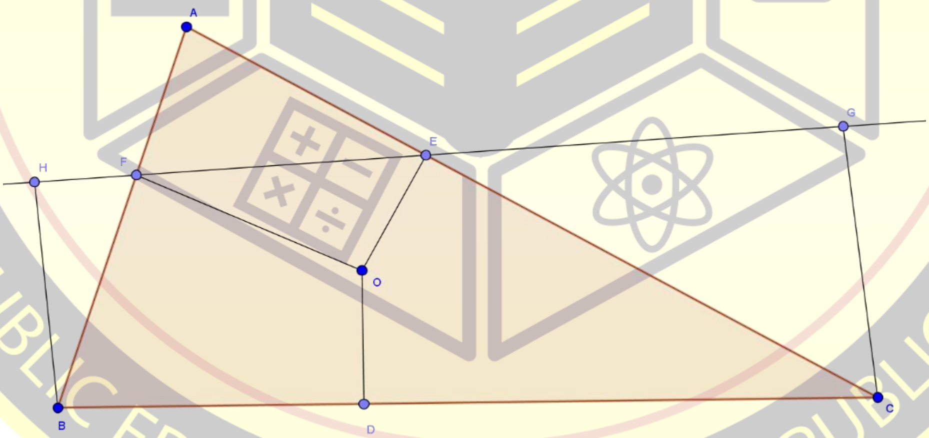
tenglikni hosil qilamiz. Xuddi shu usulda

$$EG = \frac{OF}{OA} CE$$

tenglikni topamiz. Ptolomey teoremasini $AFOE$ to‘rtburchakka qo‘llab,

$$OA \cdot FE = AF \cdot OE + AE \cdot OF \;\Rightarrow\; FE = \frac{AF \cdot OE + AE \cdot OF}{OA}$$

tenglikni topamiz.



Yuqorida topilgan tengliklar quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$BC \geq \frac{OE}{OA} BF + \frac{AF \cdot OE + AE \cdot OF}{OA} + \frac{OF}{OA} CE$$

yoki

$$BC \cdot OA \geq OE \cdot BF + AF \cdot OE + AE \cdot OF + OF \cdot CE =$$

$$OE(BF + AF) + OF(AE + CE) = OE \cdot AB + OF \cdot AC\,.$$

Har ikkala tarafni BC ga bo‘lib,

$$OA \geq \frac{AB}{BC} OE + \frac{AC}{BC} OF$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Xuddi shu usulda boshqa tomonlarning proyeksiyalari yordamida

$$OB \geq \frac{BC}{CA} OF + \frac{BA}{CA} OD$$

va

$$OC \geq \frac{CA}{AB} OD + \frac{CB}{AB} OE$$

tengsizliklarni topishimiz mumkin. Yuqorida topilgan tengsizliklarni barchasini qo‘shib,

$$OA + OB + OC \geq \left(\frac{BA}{CA} + \frac{CA}{AB}\right) OD + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{CB}{AB}\right) OE + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{CA}\right) OF$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Endi o‘rta qiymatlar haqidagi Koshi tengsizligidan foydalansak,

$$OA + OB + OC \geq \left(\frac{BA}{CA} + \frac{CA}{AB}\right) OD + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{CB}{AB}\right) OE + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{CA}\right) OF \geq 2(OD + OE + OF)$$

tengsizlikni hosil qilamiz va shu yerda teroema to‘liq isbotlanadi.

4-6 sinf o‘quvchilari uchun

1. Davron bilan Farrux bitta poyezdda sayrga chiqishdi. Davron poyezdning boshiga nisbatan 117 – vagonda, Farrux esa poyezdning oxiriga nisbatan 134 – vagonda ketmoqda. Agar ularning joylashgan vagoni qo‘shni bo‘lsa, poyezd nechta vagondan iborat?

A) 252 B) 248 C) 250 D) 249

2. Stol ustida beshburchak va oltiburchaklar yotibdi. Ularning hammasi bo‘lib 37 ta uchi bo‘lsa, stol ustida nechta beshburchak bor?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Besh xonali soning birinchi raqami 5 ga teng. Agar bu raqamni soning oxiriga qo‘ysak, oldingi sondan 747 ga kam son hosil bo‘lsa, bu sonning raqamlar yig‘indisini toping.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

4. Raqamlar yig‘indisi 4 ga teng bo‘lgan nechta uch xonali son bor?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

5. Shilliqurt 23 metrli daraxt tepasiga chiqmoqchi. U har kuni kunduzi 5 metrga ko‘tariladi, kechasi esa 2 metrga sirg‘alib pastga tushadi. Shilliqurt necha kunda daraxtga chiqadi?

A) 7 kunda B) 9 kunda C) 6 kunda D) 8 kunda

6. 1, 2, 3, 5, 6, 7 sonlar orasida juft sonlar ko‘pmi yoki toq sonlar?

A) juftsonlar B) toq sonlar C) ularning soni teng D) ular orasida juftson yo‘q

7. Bobo 64 yoshda, 1-nabirasi undan 8 marta kichik. 2-nabirasi 1-nabira va bobo yoshlari yig‘indisidan 6 marta kichik. Boboning o‘g‘lining yoshi bobo, 1-nabira va 2-nabira yoshlari yig‘indisidan 2 marta kichik. O‘g‘lining yoshini toping.

A) 42 yoshda B) 48 yoshda C) 36 yoshda D) 40 yoshda

8. Gul do‘koniga sotish uchun 640 tup gul ko‘chati keltirildi. Birinchi kuni 14200 so‘mga, 2-kuni 49800 so‘mga gul ko‘chatlari sotildi. Agar 320 tup gul ko‘chatlari qolgan bo‘lsa, har bir gul ko‘chatlari necha so‘mdan sotilgan?

A) 300 so‘m B) 100 so‘m C) 400 so‘m D) 200 so‘m

9. Kosmonavtlar Marsga uchishdi. Ular 2017-yil 7-iyul kuni 00:00 da uchib ketishgan. Agar ular 2019-yil 16-oktabr kuni soat 07:00 da yerga qo‘ngan bo‘lsa, qancha vaqt kosmosda bo‘lishgan? (1 yil=365 kun, javobingizni soatlarda ifodalang)

A) 25 536 soat B) 19 951 soat C) 23 345 soat D) 21 009 soat

10. 1 dan 57 gacha bo‘lgan sonlar orasida 4 raqami ishtirok etgan sonlar nechta?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 12

11. 1 dan 100 gacha bo‘lgan sonlar ichida 3 ga qoldiqsiz bo‘linadigan sonlar nechta?

A) 17 B) 29 C) 32 D) 33

12. Stol to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida. Uning perimetri 4 *m*. Uning bir tomoni ikkinchisidan 4 *dm* qisqa. Shu stolning kichik tomoni uzunligini *sm* larda ifodalang.

A) 8 *sm* B) 80 *sm* C) 72 *sm* D) 80 *dm*

13. 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlari bilan raqamlangan kartalardan foydalanib, ikkita uch xonali sonlar hosil qilish mumkin, masalan 645 va 321. Erkin bu kartalardan foydalanib shunday ikkita uch xonali son tuzdiki, ular orasidagi farq eng kichik bo‘ldi. Bu ayirma nechaga teng.

A) 89 B) 69 C) 56 D) 47 E) 38

14. a soning oxirgi raqami 1 ga teng va uning o‘nta bo‘luvchisi bo‘lsa, $10a$ sonining nechta bo‘luvchisi bor?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50

15. 2001 ta butun musbat sonning ko‘paytmasi 105 ga, yig‘indisi 2021 ga teng. Bu sonlarning eng kattasi nimaga teng?

A) 15 B) 35 C) 21 D) 105 E) 7

Test topshiriqlarining javoblari

1. A	**6. B**	**11. D**
2. E	**7. A**	**12. B**
3. D	**8. D**	**13. D**
4. A	**9. B**	**14. C**
5. A	**10. B**	**15. C**

Fan olimpiadalari bo‘yicha iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash departamenti sizga omadlar tilaydi!