Xalq ta'limi vazirligi Fan olimpiadalari bo'yicha iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash departamentining matematika fanidan 15 – haftalik topshiriqlarining yechimlari

10 – 11 sinf o'quvchilari uchun

1 – SONLAR NAZARIYASI. Aytaylik n −natural son uchun $d(n)$ −uning barcha natural bo'luvchilari soni bo'lsin. U holda $n = (d(n))^2$ tenglik bajariladigan barcha n larni toping.

Yechimi. n=1 yechim ekanligini osongina toping mumkin.Endi 1 dan farqli yechimlarini qidiramiz. $n = (d(n))^2$ bo'lgani uchun n – to'la kvadrat. Demak

$$n = p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{2k_m}$$

va

$$d(n) = (2k_1+1)(2k_2+1)\ldots(2k_m+1)$$

Bundan

$$p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{2k_m} = (2k_1+1)^2(2k_2+1)^2\ldots(2k_m+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} = (2k_1+1)(2k_2+1)\ldots(2k_m+1)$$

ekanligini topamiz.

Lemma: $3^x > 2x+1$ bu yerda $x > 1$ va x-natural son.

Isboti: Bu lemmani induksiya metodi orqali isbotlaymiz:

$x = 2$ da o'rinli:

$$3^2 > 2\times3+1$$

$x = k$ da o‘rinli bo‘lsin:

$$3^k > 2 \times k + 1$$

Endi $x = k + 1$da o‘rinli ekanini isbotlaymiz.

$x = k + 1$ bo‘lsin,

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 > 3(2k+1) = 6k + 3 > 2k + 3 = 2(k+1) + 1$$

demak lemma isbotlandi. Endi shu lemmadan foydalanib masalani isbotlaymiz. Bizga

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1)\ldots(2k_m + 1)$$

ekanligi ma’lum.Lemmaga ko‘ra**:**

$$3^{k_i} > 2k_i + 1 \ (i = 1, 2, 3 \ldots m)$$

tenglik bajarilishi uchun faqat $k = 1$ va $p = 3$ bo‘lishi kerak, ya’ni $n = 9$. Demak masala shartini qanoatlantiruvchi n lar 1 va 9.

Javob: $n = 1, 9$.

2 – ALGEBRA. Haqiqiy $a_1, a_2, \ldots a_{2019}$ sonlari uchun $\sum_{i=1}^{2019} a_i^2 = 1$ va

$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{2019} - a_1|$ bo‘lsa, S ning eng kata qiymatini toping.

YECHILISHI: Bu masalani hal qilishimizdan avval bir lemmani isbotlab olamiz.

Lemma: $|x_i - x_j| \le |x_1| + |x_j|$ tengsizlik ixtiyoriy x_i, x_j lar uchun o‘rinli.Bu lemmani isbotini aziz foydalanuvchilarni o‘zlariga havola qilamiz.

Yuqoridagi lemmadan foydalangan holda

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{2019} - a_1| \le |a_1| + |a_{2019} - a_1| + |a_{2019}| + 2(|a_2| + |a_3| + |a_4| + \ldots + |a_{2018}|)$$

ni topib olamiz, va ushbu

$$|a_1|+|a_{2019}-a_1|+|a_{2019}|\le 2\max\left(|a_1|;|a_{2019}|\right)$$

tengsizlik ham o‘rinli bo‘ladi. a_1 va a_{2019} sonlarning ishoralari bir xil bo‘lgani uchun ,umumiylikka zarar yetkazmagan holda

$$2\max\left(|a_1|;|a_{2019}|\right)=2|a_1|$$

deb olamiz va Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalangan holda

$$S\le 2\left(|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+....+|a_{2018}|\right)\le 2\sqrt{\left(\left|a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+.....+a_{2018}^{\ 2}\right|\right)\cdot 2018}=2\sqrt{2018}$$

ga ega bo‘lamiz. Demak S ning eng kata qiymati $2\sqrt{2018}$ ekan. Tenglik

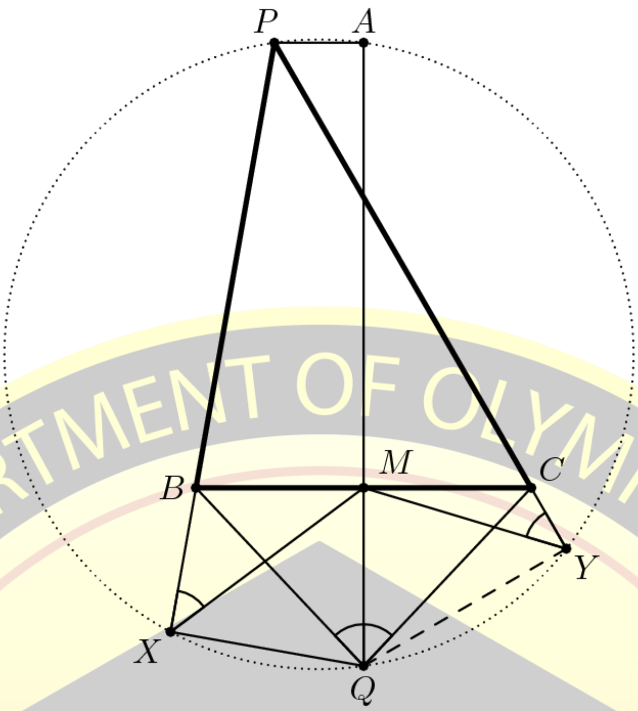
$$a_1=\frac{1}{\sqrt{2018}};\ a_2=-\frac{1}{\sqrt{2018}};\ a_3=\frac{1}{\sqrt{2018}};...\ a_{2018}=-\frac{1}{\sqrt{2018}};\ a_{2019}=0$$

Holida bajariladi.

Javob: $2\sqrt{2018}$

3 – GEOMETRIYA. $\triangle ABC$ da $AB=BC$ va M nuqta BC ning o‘rtasi.P uchburchak tashqarisidagi shunday nuqtaki, bunda $PB<PC$ va $PA||BC$. X va Y nuqtalar mos ravishda PB va PC to‘g'ri chiziqlarda olingan va B nuqta P va X, C nuqta P va Y nuqtalar orasida joylashgan. Agar PXM va PYM burchaklar teng bo‘lsa, $APXY$ to‘rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinligini isbotlang.

YECHILISHI: AM ning davomida shunday Q nuqta olamizki, bunda $\angle BXQ=90^\circ$. Bundan B,M,X,Q nuqtalar bir aylanada yotishi kelib chiqadi.



Boshqa tomondan olib qaraydigan bo‘lsak $BM = MC$ va $\angle PXM = \angle PYM$ ekanidan $\angle BXM = \angle BQM = \angle MQC = \angle CYM$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa C, Y, Q, M lar bir aylanada yotishini isbotlaydi. $\angle CMQ = 90^\circ$ va C, Y, Q, M lar bir aylanada yotishi tufayli $\angle CYQ = 90^\circ$.Demak $\angle CYQ = \angle BXQ = 90^\circ$ va bundan P, X, Y, Q lar bir aylanada yotishi kelib chiqadi.Boshqa tomondan $PA \| BC$ ekanligidan $\angle PAQ = 90^\circ$ ligini topamiz, bu esa A, P, X, Q, Y lar diametri PQ bo‘lgan aylanada yotishi kelib chiqadi.**Isbot tugadi!**

4 – KOMBINATORIKA. P to‘plam 1 dan 15 gacha bo’lgan natural sonlardan tashkil topgan. Agar A to‘plam $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ elementlardan tashkil topgan P ning qism to‘plami bo‘lsa va $a_1 + 6 \leq a_2 + 3 \leq a_3$ shartlar bajarilsa, P ning nechta bunday qism to‘plami mavjud?

YECHILISHI: Faraz qilaylik a_1 dan kichik bo‘lgan toplam elementlari b ta , a_1 va a_2 lar orasidagi elementlar soni c ta va a_2 va a_3 lar orasidagi elementlar d ta , va a_3 dan kata elementlar e ta bo‘lsin.P toplamning A qism toplamlari sonini toppish b+c+d+e=12 tenglamani yechimlari sonini topishga teng kuchli.Bunda $b \geq 0;\ c \geq 2;\ d \geq 2\ va\ e \geq 0$. $\mathrm{m} = c - 2; n = d - 2$ almashtirishni bajarib $\mathrm{b} + \mathrm{m} + n + e = 8$ ga ega bo‘lamiz,bu yerda b,m,n,e lar musbat butun sonlar va bu tenglama musbat butun sonlarda

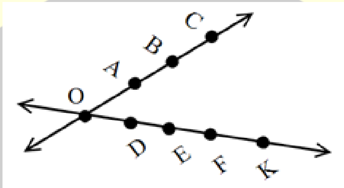
$\binom{11}{3}=\frac{11!}{3!(11-3)!}=165$ ta yechimga ega.Demak P to‘plamning 165ta A qism to‘plamlari mavjud ekan.

Javob: 165

7 – 9 sinf o‘quvchilari uchun

ALGEBRAIK IFODALAR HAFTALIGI

1-MASALA. Quyida berilgan 8 ta nuqta orqali nechta turli uchburchak yasash mumkin?



YECHILISHI: Uchburchak 3 ta uchdan iborat bo‘ladi .Shu sababli uchburchak yasash uchun 3 ta nuqta kerak bo‘ladi.Masalani yechish uchun 3 ta holni qaraymiz.

1) A, B, C nuqtalar orasidan 2 ta va D, E, F, K nuqtalar orasidan 1 ta nuqtani olamiz,buni $\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1}=12$ xil usulda qila olamiz.

2) Endi A, B, C nuqtalar orasidan 1 ta va D, E, F, K nuqtalar orasidan 2 ta nuqtani olamiz, buni $\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}=18$ xil usulda qila olamiz.

3) Endi bir uchi O da va qolgan 2 ta uchidan biri A, B, C nuqtalar orasidan ,qolgan biri esa D, E, F, K nuqtalar orasidan olamiz. Buni $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}=12$ xil usulda qila olamiz. Demak jami uchburchaklar soni 12+12+18=42 ta ekan

Javob:42ta

2-MASALA. Aytaylik bizga $S = \{1,2, \dots 2019,2020\}$ to‘plam berilgan va $A = \{a, b, c\}$ to‘plam S ning qism to‘plami bo‘lsin. Agar $a + c = 2b$ bo‘lsa, bu to‘plam *“chiroyli”* deb ataladi. U holda S ning nechta *“chiroyli”* qism to‘plami bor?

Izoh: A to‘plamning elementlarining o‘rni o‘zgargani bilan A to‘plam o‘zgarmaydi. Ya’ni $A = \{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$ kabi.

YECHILISHI: $a + c = 2b$ bo‘lgani uchun a+c juft bo‘lishi kerak.Faqat 2 ta holdagina shunday bo‘la oladi:

1-hol: a va c ning ikalasi ham toq. Demak bunday kombinatsiyalar soni ja‘mi C_{1010}^2 ta.Chunki 1 dan 2020 gacha 1010 ta toq son mavjud.

2-hol: a va c ning ikalasi ham juft.Demak xuddi yuqoridagidek C_{1010}^2 ta holat mavjud.Chunki 1 dan 2020 gacha 1010 ta juft son bor.

$A = \{a, b, c\}$ uchlik to‘plam bo‘lgani uchun $a \neq b \neq c$. Demak barcha chiroyli qism to‘plamlar soni $2 \times C_{1010}^2 = 1010 \times 1009$ ta.

Javob: 1010× 1009 ta.

3-MASALA. Toq sonlar quyidagicha guruhlarga bo‘lingan: $(1), (3,5), (7,9,11), (13,15,17,19), \dots\dots$. Bu yerda $n-$guruhda n ta toq son bor. U holda 2021 nechanchi guruhda joylashgan.

YECHILISHI: Har bir guruhdagi birinchi sonlarga qaraydigan bo‘lsak,

$$3 = 1 + 2, 7 = 1 + 2 + 2 \times 2,\ 11 = 1 + 2 + 2 \times 2 + 2 \times 3$$

yoki $n-$guruhdagi birinchi son

$$1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 2 \times (n - 1) = 1 + n(n - 1)$$

ga teng bo’ladi. Endi agar har bir guruhning oxirgi sonlariga qaraydigan bo‘lsak

$$5 = 1 + 2 \times 2, 11 = 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3, 19 = 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4$$

yoki n −guruhdagi oxirgi son

$$1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + \cdots + 2 \times n = 1 + (n + 1)(n - 1)$$

ga teng. 2021 ni $2021 = 41 + 45 \times (45 - 1)$ ko‘rinishida yozib olib 2021 soni 45-guruhda ekanligini topamiz.

Javob: 45-guruhda.

4-MASALA: Muntazam yuzburchakning barcha uchlari 10 xil rangda bo’yalgan. Shu muntazam yuzburchakning shunday 4 ta uchi topilishini isbotlangki, bunda bu 4 ta nuqta to‘g‘ri to‘rtburchakning uchlari va ko‘pi bilan 2 xil rangda bo‘yalgan.

YECHILISHI: Keling ko‘pburchakga tashqi aylana chizaylik. Bu aylanani 50 ta ko‘pburchakning uchlaridan tashkil topgan diametrlarini olaylik. Agar ushbu diametrlarning 2 tasini uchlarining ranglari mos tushsa, bu diametrlarning 4 ta uchi to‘g‘ri to‘rtburchak hosil qiladi va bu to‘g‘ri to‘rtburchak masala shartini qanoatlantiradi. Biz jami $\binom{10}{2} = 10 \cdot 9 : 2 = 45$ ta diametrni uchlarini 2 ta turli rangga bo‘yay olamiz (tartibini inobatga olmagan holda). Demak Drinxli prinsipiga ko‘ra bizda kamida 5 ta diametr qoladi va ularning uchlari bir xil rangda. Ixtiyoriy ikkitasini olsak, ularning uchlari biz qidirgan to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘ladi.

Fan olimpiadalari bo‘yicha iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash departamenti sizga omad tilaydi!