Xalq ta'limi vazirligi Fan olimpiadalari bo'yicha iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash departamentining matematika fanidan 12 – haftalik topshiriqlarining yechimlari

10 – 11 sinf o'quvchilari uchun

1 – SONLAR NAZARIYASI. 111 soni $\left[\sqrt[n]{111}\right]$ soniga bo'linadigan barcha $n \in \mathbb{N}$ natural sonlarni toping.

Yechimi: Agar $\left[\sqrt[n]{111}\right] = 1$ tenglik o'rinli bo'ladigan ixtiyoriy n natural son masala shartini qanoatlantiradi, ya'ni $\left[\sqrt[n]{111}\right] < 2$ bundan esa $n > 6$ shartni qanoatlantiruvchi natural sonlar masala shartini qanoatlantiradi. Tekshirish yo'li bilan esa $n = 1, 4$ sonlar ham masala shartini qanoatlantirishini topamiz.

Javob: $n = 1, 4$ va $n > 6$

2 – ALGEBRA. Quyiyagi yig'indini hisoblang:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} C_n^k$$

Yechimi: Biz bilamizki $C_{n+3}^k = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k)} C_n^k$ tenglik o'rinli.

$k = 0$ va $k = n$ da esa

$$S_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n+3} C_{n+3}^k - C_{n+3}^{n+1} - C_{n+3}^{n+2} - C_{n+3}^{n+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} \cdot \left(2^{n+3} - \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) \right) = \frac{2^{n+4} - (n^2 + 3n + 2)}{2(n+3)(n+2)(n+1)}$$

Javob: $\frac{2^{n+4} - (n^2 + 3n + 2)}{2(n+3)(n+2)(n+1)}$

3 – GEOMETRIYA. Aytaylik $\triangle ABC$ uchburchakda $(8AB-7BC-3CA)^2=6\cdot(AB^2-BC^2-CA^2)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\angle A$ burchakni qiymatini toping.

Yechimi: Bu uchburchakning tomonlarini a,b,c deb olaylik. Tengliklarni ochib soddalashtirsak,

$$64c^2+49a^2+9b^2-112ac-48bc+42ab=6c^2-6a^2-6b^2$$

tenglikni olamiz. Bundan,

$$15b^2+2b(21a-24c)+55a^2-112ac+58c^2=0$$

tenglik keladi. Uchburchak tomoni mavjud bo‘lishi diskriminant musbat bo‘lishi kerak

$$441a^2-1008ac+576c^2-825a^2+1680ac-870c^2\geq 0$$

ya’ni,

$$-6(64a^2-112ac+49c^2)\geq 0$$

Demak, $8a=7c$ va $3a=7b$ tengliklar o‘rinli. $\cos A=\dfrac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 8}=\dfrac{1}{2}$ bundan esa $\angle A=60^\circ$ ekanligini olamiz.

Javob: $\angle A=60^\circ$

4 – KOMBINATORIKA. Bizga 2020 qator taxlangan tangalar berilgan. Barcha tangalar gerb tomoni yuqoriga qaragan. Biz bitta qadamda bu tangalarning ixtiyoriy 2007 tasini tanlaymiz va ularni barchasini teskarisiga to‘nkaramiz. Bunday qadamlarni bir nechta marotaba bajarib barcha tangalarning gerb tomoni pastga qaragan holatga olib kelish mumkinmi? (Agar mumkin bo‘lmasa javobingizni asoslang)

Yechimi: Biz bu tangalarni 1, 2, … 2020 deb belgilaylik. U holda biz quyidagicha operatsiyasini bajaramiz:

1 – opertasiya: 1, 2, … 2007 tangalarni to‘nkaramiz.

2 – opertasiya: 2, 3, … 2008 tangalarni to‘nkaramiz.

3 – opertasiya: 3, 4, … 2009 tangalarni to‘nkaramiz.

……………………………

……………………………

2020 – opertasiya: 2020. 2020, 1, 2, … 2006 tangalarni to‘nkaramiz.

Biz jami 2020 ta operatsiya bajardik va har bir tanga bu operatsiyalarning aynan 13 tasida ishtirok etmaydi ya’ni 2007 tasida ishtirok etadi. Bu esa uni 2007 marotaba to‘nkarilishini bildiradi. Bundan esa barcha tangalarni teskari tomonga to‘nkarish mumkinligi kelib chiqadi.

Javob: Ha mumkin

7 – 9 sinf o‘quvchilari uchun

GEOMETRIYA HAFTALIGI

1 – masala. AB kesma uzunligi 8 ga teng. M nuqta bu kesmaning o‘rtasi. Barcha X nuqtalarni topingki(AB to‘g‘ri chiziqda) $XA+XB+XM=9$ tenglik o‘rinli bo‘lsin.

Yechimi: Faraz qilaylik X nuqta AB kesmada bo‘lmasin. U holda $XM>4$ bundan XA yoki $XB>8$, ya’ni ziddiyat. Demak X nuqta AB kesmada ekan. Bundan esa $XM=1$ ekanligini olamiz.

Javob: X nuqta AB kesmada $XM=1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqta.

2 – masala. $\triangle ABC$ uchburchakning $\angle ACB$ burchak bissektrisasida N nuqta, AC tomon davomida (C nuqtaning) M nuqta belgilangan bo‘lib bunda $BC=CN=2$ va $\angle CMN=\angle BMN$ tengliklar o‘rinli. CM kesma uzunligini toping. (Agar masalani sinuslar teoremasidan foydalanib yechilsa, 1 ball beriladi)

Yechimi: Bu masalani yechishda tashqi burchak bissektrisasidan foydalanamiz. $\triangle CMB$ uchburchakda CN kesma tashqi bissektrisa bo‘ladi. MN kesma esa ichki bissektrisa demak BN ham tashqi bissektrisa bo‘ladi. Bundan esa burchaklarni hisoblab $\angle NCB=\angle CBM$ tengligini olamiz. Demak, $CN \parallel BM$ ekan. Bundan biz $CM=CN=2$ ekanligini olamiz.

Javob: $CM = 2$

3 – masala $\triangle ABC$ uchburchakda $\angle A = 30^\circ$ ga teng. AB tomonda D nuqta, BC tomonda E nuqta va AC tomonda F nuqta shunday olinganki, bunda $AD = CD$ va $CE = DE = DF$ tengliklar o‘rinli. U holda $BE < AF$ tengsizlikni isbotlang.

Yechimi: Bu masalada $\triangle ADC$ uchburchak teng yonli ekanligiga e’tibor qaratish kerak. Bizga F nuqta olingan deyilgan, ya’ni bunday nuqta ikkita bo‘lishi mumkin. Lekin bizga aniq ma’lumot aytilmagan bu esa F nuqta AC kesmaning o‘rtasi ekanligini bildiradi. Bundan foydalanib B va D nuqtalar ustma-ust tushishi va E nuqta BC tomon o‘rtasi ekanligi keladi. Demak, $AF > BE$.

Isbot tugadi.

4 – masala $\triangle ABC$ uchburchakning AC tomonida D nuqta, AB tomonida K nuqta va uchburchak tashqarisida E nuqta shunday olinganki bunda $AE = DC$, $\angle ABD = \angle DBC$ va $\angle EAB = \angle ACB$ tengliklar o‘rinli va D, K, E nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. EK va KD kesmalar teng ekanligini isbotlang.

Yechimi: K nuqtani BD chiziqqa nisbatan simmetrik ko‘chirib, bu nuqtani T deb belgilaylik. U holda $\triangle DCT$ va $\triangle AKE$ uchburchaklarda $\angle DCT = \angle EAK$, $AE = CD$ va $DT = KE$ tengliklar o‘rinli. Bundan sinuslar teoramasiga ko‘ra $KE = DT = DK$ tenglikni olamiz. Demak so‘ralgan narsa isbotlandi.

Isbot tugadi.

Fan olimpiadalari bo‘yicha iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash departamenti sizga omad tilaydi!